



Die Mechanik fester Körper.

Lehrbuch in elementarer Darstellung

für höhere technische Fachschulen und zum
Selbstunterricht nebst einer Sammlung
von 250 aufgelösten Beispielen

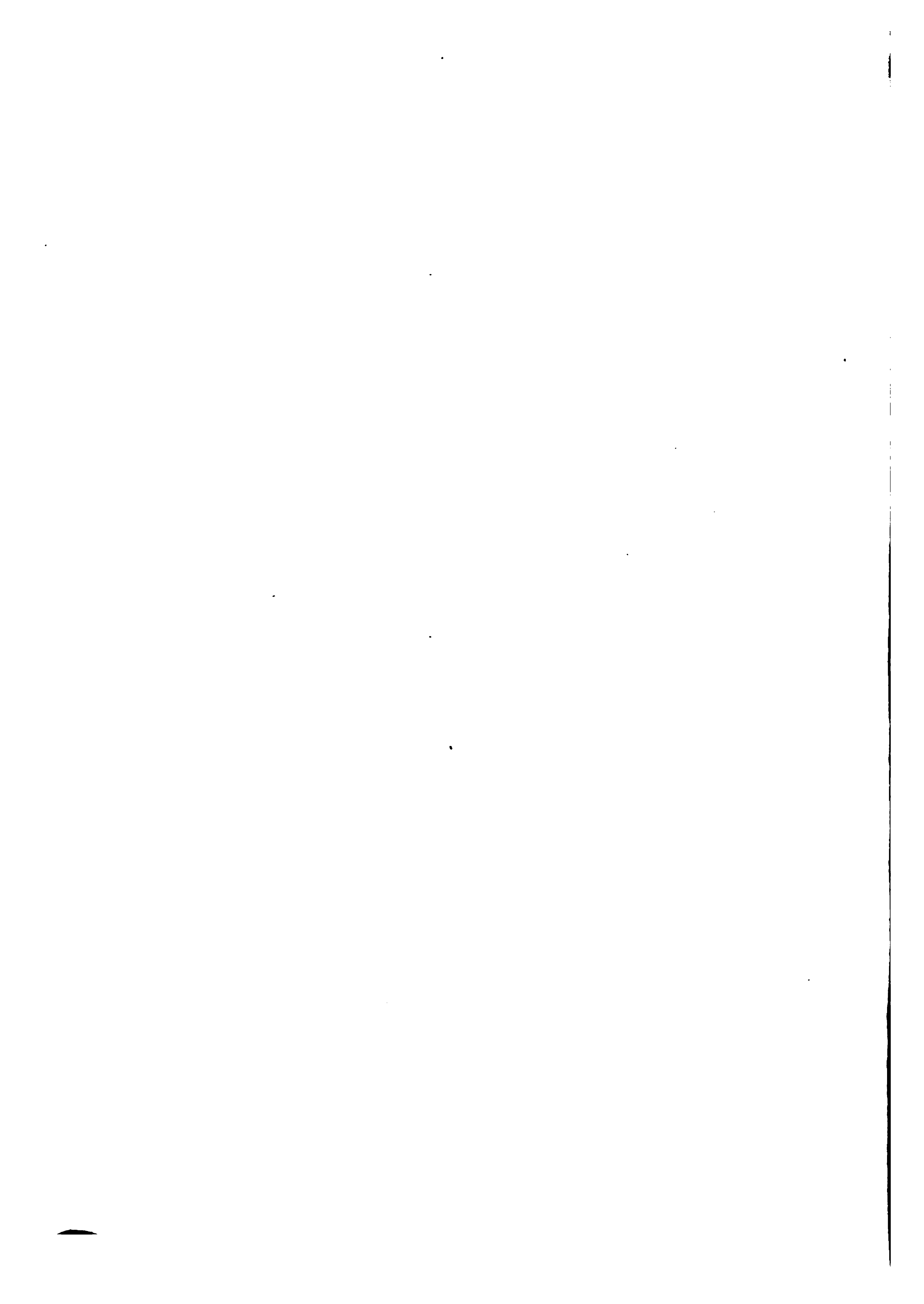
von

Ingenieur Ernst Blau

Mit 210 Abbildungen im Texte.



Hannover.
Dr. Max Jänecke, Verlagsbuchhandlung.
1905.



Vorwort.

In vorliegendem Werke war der Verfasser bestrebt, den Stoff der Mechanik fester Körper möglichst erschöpfend zu behandeln.

Zum Verständnisse des Lehrbuches werden nur die Kenntnisse der niederen Mathematik vorausgesetzt, so daß dasselbe zum Gebrauche an höheren technischen Fachschulen und zum Selbstunterrichte geeignet ist. Um die Anwendung der entwickelten Grundsätze zu zeigen, wurden die Beispiele mit Auflösungen versehen.

Die vorgenommene Einteilung des Stoffes in Phoronomie, Statik und Dynamik ist die allgemein übliche.

Im Abschnitte Phoronomie war der Verfasser imstande, eine einfache Herleitung der Gesetze des Kurbeltriebes (§ 6) zu geben, so daß er auch die Theorie des Beschleunigungsdruckes (§ 63) und die Schwungradberechnung (§ 64) in sein Lehrbuch aufnehmen konnte.

Im Abschnitte Statik wurden neben den rechnerischen auch die graphischen Methoden der Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften, der Bestimmung von Spannungen in den Stäben von Fachwerkträgern und von Schwerpunktsbestimmungen, ferner die nützlichen und schädlichen Wirkungen aller Arten der Reibung genauestens besprochen.

Im Abschnitte Dynamik, dessen elementare Bearbeitung die größten Schwierigkeiten bot, wurde auf die Ermittlung der Trägheitsmomente von Linien, Flächen und Körpern sowie auf die Ableitung und Anwendung der Bewegungsgesetze rotierender Körper besonderer Wert gelegt.

Indem der Verfasser hofft, den sich gesteckten Zielen gerecht geworden zu sein, übergibt er sein Buch der Öffentlichkeit, indem er gleichzeitig seinem Verleger, Herrn Dr. Max Jänecke, für die würdige Ausstattung desselben bestens dankt.

Ingenieur **Ernst Blau.**



Inhalt.

Einleitung.

Physikalische Grundgesetze.

Ein Körper befindet sich in Ruhe oder in Bewegung, je nachdem er seinen Ort beibehält oder ihn fortwährend verändert.

Die Mechanik stellt sich nun die Aufgabe, die Ursachen von Ruhe oder Bewegung der Körper zu untersuchen.

„Die Ursache der Zustandsänderung eines Körpers heißt **Kraft.**“

„Solange ein Körper sich selbst überlassen ist oder solange er nicht unter dem Einflusse einer Kraft steht, verbleibt er in seinem Zustande.“

Dieses letztere Gesetz wird das **Gesetz der Trägheit** genannt.

Die Theorie der Bewegungen ohne Rücksicht auf die sie veranlassenden Kräfte bildet den Gegenstand der **Bewegungslehre** oder **Phoronomie.** Das übrige Gebiet der Mechanik zerfällt in zwei Abschnitte. Der erstere beschäftigt sich mit den Bedingungen des Gleichgewichtes von Kräften und wird **Statik** genannt, der letztere behandelt die Beziehungen zwischen Kräften und den von ihnen erzeugten Bewegungen und führt den Namen **Dynamik.**

Eine Bewegung ist bestimmt durch ihre Bahn, durch ihre Art und durch die Zeit, in welcher sie erfolgt.

Die Bahn kann gerad- oder krummlinig sein. Die Richtung der Bewegung wird durch einen Pfeil angedeutet.

„Die Art der Bewegung ist **gleichförmig** oder **ungleichförmig**, je nachdem die Wege in gleichen Zeiten gleich oder ungleich sind.“

„Man nennt das Verhältnis aus Änderung eines Weges zur Zeit, in welcher diese Änderung erfolgt, **Geschwindigkeit.**“

Dieselbe ist bei einer gleichförmigen Bewegung konstant.

Bei einer ungleichförmigen Bewegung kann nur von einer mittleren Geschwindigkeit gesprochen werden.

„Das Verhältnis einer Änderung der Geschwindigkeit und der Zeit, in welcher diese Änderung stattfindet, heißt **Beschleunigung** oder **Acceleration,** bez. **Verzögerung** oder **Retardation.**“

„Ist die Beschleunigung, bzw. die Verzögerung, konstant, so nennt man die Bewegung eine **gleichförmig beschleunigte,** bzw. **gleichförmig verzögerte.**“ —

„Da die Ursache jeder Bewegungsänderung eine Kraft ist, muß die Ursache der gleichförmig beschleunigten, bzw. der gleichförmig verzögerten Bewegung, eine konstante Kraft sein.“

Je größer die letztere ist, desto größer wird auch für denselben Körper dessen Beschleunigung, bzw. Verzögerung.

Wird die Menge des den Körper erfüllenden Stoffes, die **Masse**, größer, so muß die Kraft ebenfalls größer werden, damit dieselbe Beschleunigung, bzw. Verzögerung, resultiere.

Bezeichnen nun P die Kraft, m die Masse des Körpers und p seine Beschleunigung, bzw. Verzögerung, so gilt auf Grund eben gemachter Erwägungen

$$P = m \cdot p \quad \text{(1)}$$

$$\text{und } m = \frac{P}{p} \quad \text{(1a)}$$

Dieses Gesetz heißt **das Gesetz der Beschleunigung.**

In ihm ist das Trägheitsgesetz als spezielles Gesetz enthalten, denn ist $P = o$, so ist es auch p, da m nicht Null sein kann.

Obige Gleichung (1a) gilt natürlich auch für die Schwerkraft G (Gewicht eines Körpers in kg), d. i. die Anziehungskraft, welche die Erde auf einen Körper ausübt. Die Beschleunigung, welche dieselbe hervorbringt, nennt man g und letztere beträgt in unserer geographischen Breite 9,81 m. Sie ist aus Versuchen ermittelt. Daher wird die Masse eines Körpers

$$m = \frac{G}{g} \quad \text{(2)}$$

Die Masse wird 1, wenn $\frac{G}{g} = 1$ wird, d. h., wenn sie 9,81 kg wiegt.

Ein Grundgesetz der Physik ist ferner das **Gesetz von Wirkung und Gegenwirkung** oder das **Gesetz von Aktion und Reaktion.**

„Versetzt eine Kraft einen Körper in einen anderen Zustand, ohne daß sie zu wirken aufhört, so muß behufs Eintretens eines Gleichgewichtszustandes des Körpers eine gleich große Gegenkraft hervorgerufen werden.“

Wird z. B. auf ein horizontales, in zwei Punkten unterstütztes Brett innerhalb der Stützen ein Gewicht gelegt, so biegt das letztere jenes so lange durch, bis der Durchbiegungswiderstand (Gegenkraft) so groß wie das Gewicht geworden ist.

Die Wirkung der Gegenkraft ist bereits erkennbar und äußert sich noch deutlicher dann, wenn das Gewicht vom Brette abgehoben wird, in welchem Momente sie dasselbe in seine Lage zurückbringt, also den ursprünglichen Gleichgewichtszustand wieder herstellt.

Das Gesetz von Wirkung und Gegenwirkung wird in jeder Aufgabe der Mechanik, in welcher von Beziehungen zwischen Kräften oder zwischen Kräften und den von ihnen erzeugten Bewegungen die Rede ist, zu erkennen sein.

Als viertes Grundgesetz soll in der Einleitung noch das **Parallelogrammgesetz** oder das **Gesetz von der Unabhängigkeit gleichzeitig erfolgender Bewegungen** besprochen werden.

„Soll ein Körper gleichzeitig dem Einflusse zweier Ursachen Folge leisten, so gelangt er nach Ablauf einer bestimmten Zeit an denselben Ort, als wenn er die Einzelbewegungen, die sogenannten **Seitenbewegungen** oder **Komponenten** unabhängig und nacheinander ausführen würde.“

Bewegt sich z. B. ein Körper in einer Rinne R, Fig. 1, in einer bestimmten Zeit von A nach B und wird die Rinne in derselben Zeit in der Richtung N parallel zu sich selbst verschoben und in die punktiert gezeichnete Lage gebracht, somit der Körper gezwungen, auch die Seitenbewegung

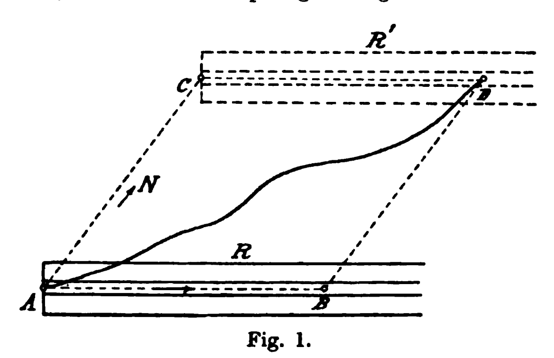


Fig. 1.

$\overline{AC}$ auszuführen, dann befindet er sich nach Ablauf der genannten Zeit in D, d. h. im vierten Eckpunkte des aus den Seitenbewegungen konstruierten Parallelogrammes. —

„$\overline{AD}$ heißt die **resultierende Bewegung.**“

Wie aber die Bewegung von A nach D erfolgt, welches das bestehende Bahngesetz ist, läßt sich erst mit späteren Hilfsmitteln bestimmen.

Erster Abschnitt.

Phoronomie oder geometrische Bewegungslehre.

§ 1. Die geradlinige, gleichförmige Bewegung.

Bewegt sich ein starrer Körper so, daß alle seine Teilchen konstante Geschwindigkeit haben und parallele Wege beschreiben, dann ist seine Bewegung eine geradlinige, gleichförmige.

Die Lage des Körpers ist vollständig bestimmt, wenn man diejenige eines seiner Punkte kennt. Es läßt sich somit die Untersuchung der Bewegung auf die eines Punktes beschränken.

Da die Geschwindigkeit c konstant ist, wird nach einer Sekunde der Weg c Meter, nach 2 Sekunden der Weg $c \cdot 2$ Meter, nach t Sekunden der Weg $c \cdot t$ Meter zurückgelegt. Also erhält man für den Weg, welchen ein Körper gleichförmig macht, die Formel

$$s = c \cdot t \quad \dots \dots \dots \quad (3)$$

Für die Zeit t_1 wäre der Weg $s_1 = c \cdot t_1$. — Durch Division der beiden letzten Gleichungen wird dann

$$\frac{s_1}{s} = \frac{t_1}{t} \quad \dots \dots \dots \quad (4)$$

„Bei gleichen Geschwindigkeiten verhalten sich die Wege wie die Zeiten, in welchen sie zurückgelegt werden."

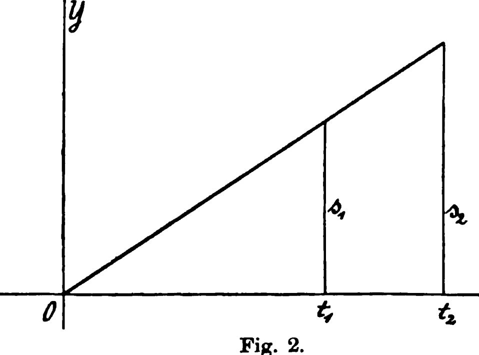


Fig. 2.

Eine zeichnerische (graphische) Darstellung des Weges bei einer gleichförmigen Bewegung ergibt sich auf folgende Weise:

Trägt man auf einer horizontalen Geraden OX, Fig. 2, vom Punkte O aus die Zeiten als Längen auf und errichtet man in den einzelnen Zeitpunkten Senkrechte, deren Größe gleich den in diesen zurückgelegten Wege sind, so ergibt der geometrische Ort der Endpunkte der letzteren die sogenannte **Weg-**

linie. Dieselbe muß durch O gehen, weil für $t = o$ auch $s = o$ ist — sie ist eine Gerade, da laut Formel (4) $\frac{s_1}{s} = \frac{t_1}{t}$ sein muß. Die Geraden $\overline{OX}$ und $\overline{OY}$, auf welchen Zeiten und Wege abgetragen werden, heißen **Koordinatenachsen**, die Zeiten und Wege **Koordinaten (Abszissen und Ordinaten)**.

Werden aber in den einzelnen Zeitpunkten Senkrechte von der Größe c errichtet, so ist die Verbindungslinie der Endpunkte der letzteren die zur $\overline{OX}$-Achse parallele **Geschwindigkeitslinie** $\overline{BC}$. — Der Inhalt des Rechteckes $OABC$, Fig. 3, ist $c \cdot t$, also gleich dem in der Zeit t mit der Geschwindigkeit c zurückgelegten Wege s. — Demnach ist der Weg einer geradlinigen, gleichförmigen Bewegung durch ein Rechteck mit der Basis t und der Höhe c dargestellt.

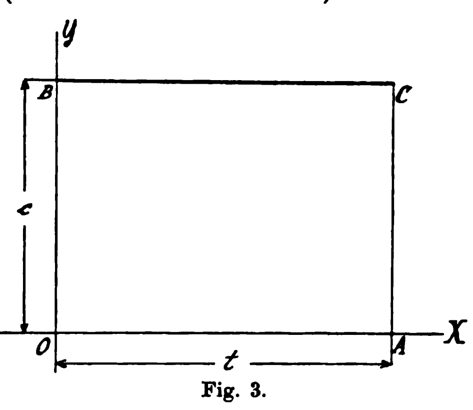


Fig. 3.

Beispiele.

1. Welche Geschwindigkeit besitzt ein Fußgänger, welcher in der Minute 115 Schritte à 0,75 m macht?

Auflösung: $c = \frac{115 \cdot 0{,}75}{60} = \frac{115 \cdot 0{,}05}{4} = \frac{5{,}75}{4}$

$$c \sim \mathbf{1{,}44\ m}$$

2. In welcher Zeit gelangt ein Lichtstrahl von der Sonne zur Erde, wenn die Entfernung beider 20000000 Meilen und die Geschwindigkeit des Lichtes mit 40000 Meilen angenommen wird?

Auflösung: $t = \frac{s}{c} = \frac{20000000}{40000} = 500$ Sek.

$$t = \mathbf{8\ Min.\ 20\ Sek.}$$

3. Ein Bote brauchte zu einem Wege von 30 km 4 Stunden 40 Minuten. Welchen Weg legte er in einer Stunde zurück?

Auflösung: $t = 4^2/_3$ Stunden, daher

$$x = \frac{30}{4\frac{2}{3}} = \frac{30}{\frac{14}{3}} = \frac{90}{14} = \frac{45}{7}$$

$$x \sim \mathbf{6{,}45\ km}$$

4. Wie groß ist die Geschwindigkeit eines Schnellzuges, der in einer Stunde 90 km zurücklegt?

Auflösung: $c = \frac{90000}{60 \cdot 60} = \frac{100}{4}$

$$c = \mathbf{25\ m/sek.}$$

5. Ein Schnellzug legt die Strecke von 30 km in 24 Minuten zurück. Wie groß ist seine stündliche Geschwindigkeit?

Auflösung:

$$\begin{array}{l} \text{In 24 Min.} \ldots\ldots 30 \text{ km} \\ \text{,, 60 ,,} \ldots\ldots x \text{ ,,} \\ \hline x : 30 = 60 : 24 \\ x = \frac{30 \cdot 60}{24} \\ x \sim \mathbf{75\ km/1^h} \end{array}$$

6. Die Triebräder einer Lokomotive haben einen Durchmesser von 1,98 m. Wie groß ist die stündliche Geschwindigkeit der Maschine bei 250 Touren?

Auflösung: $$x = \frac{1{,}98 \cdot \pi \cdot 250 \cdot 60}{1000} \text{ km}$$

$$x \sim \mathbf{93\ km}$$

7. Zwei Orte A und B sind 210 km voneinander entfernt. Von A nach B fährt ein Personenzug und von B nach A gleichzeitig ein Schnellzug ab. Ersterer hat eine Geschwindigkeit von 30 km pro 1 Stunde, letzterer eine Geschwindigkeit von 75 km pro 1 Stunde. Wann und wo begegnen sich die Züge?

Auflösung: Die Zeit, nach welcher sich beide Züge begegnen, sei x Stunden. Dann ist der Weg des Personenzuges $30\,x$, derjenige des Schnellzuges $75\,x$ km. Beide Wege müssen 210 km sein. Demnach gilt

$$30\,x + 75\,x = 210$$

$$105\,x = 210$$

$$x = \mathbf{2\ Stunden}$$

Die Züge begegnen sich **150 km von B** oder **60 km von A** entfernt.

8. Ein Schiff fährt von Dover nach Calais in 2 Stunden. Auf der Rückfahrt hat es ungünstigen Wind und legt infolgedessen um $1^1/_2$ Meilen pro Stunde weniger zurück. Auf der Hälfte der Fahrt dreht sich der Wind günstig, so daß es $^1/_2$ Meile mehr pro Stunde zurücklegen kann und noch früher ankommt. Die Zeiten der Fahrt verhalten sich wie 6 : 7. Welche Entfernung hat Dover von Calais und wieviel legt das Schiff pro Stunde bei der Rückfahrt in der ersten und zweiten Hälfte des Weges zurück?

Auflösung: Ist x die gesuchte Entfernung, so ist $\frac{x}{2}$ die stündliche Geschwindigkeit während der Hinfahrt.

Dann ist in der ersten Hälfte der Rückfahrt die Geschwindigkeit $\frac{x}{2} - \frac{3}{2}$, in der zweiten Hälfte $\frac{x}{2} - \frac{2}{2}$ Meilen, somit folgt

$$\frac{x}{\frac{x}{2} - \frac{3}{2}} : \left(\frac{\frac{x}{2}}{\frac{x-3}{2}} + \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x-2}{2}} \right) = 7 : 6$$

$$\frac{2\,x}{x-3} : \left(\frac{x}{x-3} + \frac{x}{x-2} \right) = 7 : 6$$

$$2\,x\,(x-2) : [x\,(x-2) + x\,(x-3)] = 7 : 6$$

$$2\,(x-2) : (2\,x-5) = 7 : 6$$

$$12\,x - 24 = 14\,x - 35$$

$$x = \mathbf{5^1/_2\ Meilen}$$

Geschwindigkeit in der 1. Hälfte der Rückfahrt $\frac{x-3}{2} = 1^1/_4$ Meilen

„ „ „ 2. „ „ „ $\frac{x-2}{2} = 1^3/_4$ „

§ 2. Die geradlinige, gleichförmig beschleunigte Bewegung.

Die Zunahme der Geschwindigkeit pro eine Sekunde, die Beschleunigung, werde mit p bezeichnet. Ist die Geschwindigkeit zu Anfang der Bewegung c, so ist sie nach der ersten Sekunde $c+p$, nach der zweiten $c+2p$, endlich nach der t ten Sekunde

$$v = c + pt \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

Zur Ermittlung des Weges s führt folgende Überlegung. Trägt man auf der Achse $\overline{OX}$ gleiche Zeiten (Sekunden) und in den Endpunkten der letzteren Senkrechte von der Größe der zugehörigen Geschwindigkeit auf, so ist der geometrische Ort der Endpunkte dieser Senkrechten die Geschwindigkeitslinie $\overline{AB}$, Fig. 4.

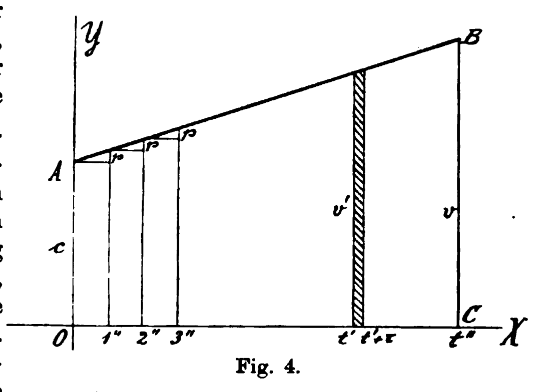


Fig. 4.

Zur Zeit t' sei eine Geschwindigkeit v' vorhanden. In der folgenden unendlich kleinen Zeit τ kann man die Bewegung gleichförmig erfolgend denken, und es stellt daher die Fläche $v' \cdot \tau$ den Weg in derselben vor. Ist nun der Weg s in t Sekunden durch lauter in unendlich kleinen Zeiten gleichförmig zurückgelegten Wegen zustande gekommen, so findet sich somit seine Größe als Maß der Fläche $OABC$, d. h. mit

$$s = \frac{v+c}{2} \cdot t \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (6)$$

„Die geradlinige, gleichförmig beschleunigte Bewegung kann somit ersetzt werden durch eine geradlinige, gleichförmige, deren Geschwindigkeit das arithmetische Mittel aus Anfangs- und Endgeschwindigkeit der ersteren ist.“

Wird für v der Wert aus (5) in (6) substituiert, dann folgt

$$s = ct + \frac{p}{2} t^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (7)$$

Durch Elimination von t aus s ergibt sich ein Zusammenhang zwischen den Größen s, v, c und p. Aus Gleichung (5) ist

$$t = \frac{v-c}{p}$$

Demnach wird $s = \frac{v+c}{2} \cdot \frac{v-c}{p}$ oder

$$s = \frac{v^2 - c^2}{2p} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Ein frei fallender Körper macht eine gleichförmig beschleunigte Bewegung; seine Beschleunigung beträgt, wie schon in der Einleitung erwähnt wurde, $g = 9{,}81$ m. Die Anfangsgeschwindigkeit beim freien Fall ist $c = o$. Somit sind die Formeln für die Endgeschwindigkeit und für den Weg

$$v = g \cdot t \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

und $$s = \frac{v}{2} \cdot t = \frac{g}{2} t^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

Beträgt die Fallhöhe h, dann ist laut Gleichung **(10)**

$$h = \frac{g}{2} t^2, \text{ woraus}$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \text{ sich ergibt.}$$

Demnach ist die Geschwindigkeit, welche der Körper erlangt hat,

$$v = g \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} \text{ oder}$$

$$v = \sqrt{2gh} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

Beispiele.

9) Wie groß war die Beschleunigung eines Punktes, dessen Geschwindigkeit während einer Minute von 2 m auf 60 m gestiegen ist?

Auflösung:

$$v = c + pt$$

$$62 = 2 + p \cdot 60$$

$$p = \frac{62 - 2}{60}$$

$$p = 1 \text{ m}$$

10. Wie lange muß sich ein Punkt bewegen, um von einer Anfangsgeschwindigkeit $c = 2$ m auf eine Endgeschwindigkeit $v = 14$ m bei einer Beschleunigung $p = 0{,}1$ m zu gelangen?

Auflösung:

$$v = c + pt$$

$$t = \frac{v - c}{p} = \frac{14 - 2}{0{,}1} = \frac{12}{0{,}1} = 120 \text{ Sek.}$$

$$t = 2 \text{ Min.}$$

11. Die Anfangsgeschwindigkeit eines Punktes beträgt $c = 10$ m, seine Endgeschwindigkeit ist $v = 20$ m. — Wie lange braucht er, um einen Weg von $s = 2250$ m zurückzulegen?

Auflösung: $$s = \frac{v + c}{2} \cdot t$$

$$2250 = \frac{20 + 10}{2} \cdot t = 15\,t$$

$$t = \frac{2250}{15}$$

$$\boldsymbol{t = 150\ \text{Sek.} = 2^1/_2\ \text{Min.}}$$

12. Eine Lokomotive fährt in 4 Minuten auf eine Geschwindigkeit von 24 m/Sek. an. Wie groß ist ihre mittlere Beschleunigung?

Auflösung: $$v = c + pt$$

$$p = \frac{v - c}{t} = \frac{24 - 0}{240}$$

$$\boldsymbol{p = 0{,}1\ \text{m}}$$

13. Ein Körper wird 2,15 m hoch gehoben und dann frei fallen gelassen. Mit welcher Geschwindigkeit langt er in der Anfangslage an?

Auflösung: $$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 2{,}15}$$

$$\boldsymbol{v = 6{,}5\ \text{m}}$$

14. Welche Höhe hat ein mit 15 m Geschwindigkeit ankommender Körper durchfallen?

Auflösung: $$v = \sqrt{2gh}$$

$$h = \frac{v^2}{2g}$$

$$h = \frac{15^2}{2 \cdot 9{,}81} = \frac{225}{19{,}62}$$

$$\boldsymbol{h = 11{,}45\ \text{m}}$$

15. Wie verhalten sich die in einzelnen, gleichen Zeiten zurückgelegten Wege einer gleichförmig beschleunigten Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit Null?

Auflösung: Die Wege nach 0, 1, 2, 3 .... Sekunden sind 0, $\frac{p}{2} \cdot 1$, $\frac{p}{2} \cdot 4$, $\frac{p}{2} \cdot 9$ ...., daher die Wege in der 1., 2., 3. .... Sekunde $\frac{p}{2}$, $\frac{3}{2}p$, $\frac{5}{2}p$ .... — Demnach verhalten sich die in einzelnen, gleichen Zeiten zurückgelegten Wege wie $\frac{p}{2} : \frac{3}{2} : \frac{5}{2}p :$ .... oder wie

1 : 3 : 5 : ...., d. h.

wie die aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen.

16. Bei einer gleichförmig beschleunigten Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit Null ist der Weg in der fünften Sekunde 18 m; wie groß ist derselbe in der siebenten Sekunde?

Auflösung: $$18 : x = 9 : 13$$

$$x = \frac{18 \cdot 13}{9} = 2 \cdot 13$$

$$\boldsymbol{x = 26\ \text{m}}$$

17. Zwei Körper bewegen sich von zwei $d = 205$ m entfernten Orten gegeneinander. Der erstere hat die Anfangsgeschwindigkeit $c_1 = 10$ m und die Beschleunigung $p_1 = 7$ m, der zweite die Anfangsgeschwindigkeit $c_2 = 6$ m und die Beschleunigung $p_2 = 3$ m. — Wann und wo treffen sie sich?

Auflösung:
$$c_1 t + \frac{p_1}{2} t^2 + c_2 t + \frac{p_2}{2} t^2 = d$$
$$10 t + \frac{7}{2} t^2 + 6 t + \frac{3}{2} t^2 = 205$$
$$16 t + 5 t^2 = 205$$
$$t^2 + 3{,}2 t - 41 = 0$$
$$t = 1{,}6 \pm \sqrt{2{,}56 + 41} = -1{,}6 \pm \sqrt{43{,}56}$$
$$t = -1{,}6 \pm 6{,}6$$

Die brauchbare Lösung ist $\boldsymbol{t = 5}$ **Sek.**

Der erste Körper ist dann von A entfernt um $x = 10 \cdot 5 + \frac{7}{2} \cdot 25$, d. h. um
$$\boldsymbol{x = 137{,}5} \textbf{ m}$$

18. Ein Stein fällt in einen Schacht. Nach $t = 6{,}33$ Sekunden hört man das Auffallen des Steines. Wie tief ist der Schacht, wenn die Schallgeschwindigkeit $c = {}^1/_3$ km/sek. beträgt?

Auflösung:

Die Zeit für den Weg des Schalles ist aus $x = c \cdot t_1 \ldots\ldots t_1 = \frac{x}{c}$.

Die Zeit für den Weg des Steines ist aus $x = \frac{g}{2} t_2^2 \ldots\ldots t_2 = \sqrt{\frac{2x}{g}}$.

Demnach wird
$$\frac{x}{c} + \sqrt{\frac{2x}{g}} = t$$
$$\frac{2x}{g}\left(t - \frac{x}{c}\right)^2$$
$$\frac{2x}{g} = t^2 - 2t \cdot \frac{x}{c} + \frac{x^2}{c^2}$$
$$x^2 - 2tc \cdot x - \frac{2c^2}{g} x + t^2 \cdot c^2 = 0.$$

Werden die Längen in km eingesetzt, so ergibt sich
$$x^2 - 2 \cdot 6{,}33 \cdot \frac{1}{3} x - \frac{2 \cdot 1}{9 \cdot 0{,}00981} x + \frac{6{,}33^2 \cdot 1}{9} = 0$$
$$x^2 - 4{,}22\, x - 22{,}65 + 4{,}4521 = 0$$
$$x = 13{,}435 \pm \sqrt{180{,}4992 - 4{,}4521}$$
$$x = 13{,}435 \pm \sqrt{176{,}0471}$$
$$x = 13{,}435 \pm 13{,}268.$$

Bedeutung hat nur das Minuszeichen; daher
$$x = 0{,}167 \text{ km} \quad \text{oder}$$
$$\boldsymbol{x = 167} \textbf{ m}$$

§ 3. Die geradlinige, gleichförmig verzögerte Bewegung.

Die Beziehungen für die geradlinige, gleichförmig verzögerte Bewegung ergeben sich, wenn man in denen der geradlinigen, gleichförmig beschleunigten Bewegung statt $p \ldots (-p)$ setzt.

Demnach lauten sie für die Endgeschwindigkeit und für den Weg

$$v = c - pt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

$$s = \frac{v + c}{2} \cdot t = ct - \frac{p}{2} t^2 \quad \ldots\ldots\ldots (13)$$

Für den vertikalen Wurf nach aufwärts ergeben sich folgende Formeln nach Substitution von g für p

$$v = c - gt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

$$s = ct - \frac{g}{2} t^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

Die Höhe, welche ein Körper, welcher mit der Anfangsgeschwindigkeit c vertikal nach aufwärts geworfen wird, erreicht, folgt aus der Erwägung, daß $v = o$ sein muß. Dann wird aus (14)

$$t = \frac{c}{g}.$$

Somit wird durch Einsetzen dieses Wertes der **Steigzeit** in (15) die **Steighöhe**

$$h = c\frac{c}{g} - \frac{g}{2} \cdot \frac{c^2}{g^2} = \frac{c^2}{g} - \frac{c^2}{2g}$$

$$h = \frac{c^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

Bei allen bisher besprochenen Bewegungen ist von den auftretenden Bewegungshindernissen abgesehen worden.

Beispiele.

19. Die Anfangsgeschwindigkeit eines Körpers beträgt 80 m und wird jede Sekunde um 0,5 m verzögert. Wie groß ist die Geschwindigkeit v nach 2 Minuten und welche Weglänge hat der Körper in dieser Zeit durchlaufen?

Auflösung: $v = c - pt = 80 - 0{,}5 \cdot 120$

$$\mathbf{v = 20\ m}$$

$$s = \frac{v + c}{2} \cdot t = \frac{20 + 80}{2} \cdot 120 = 50 \cdot 120$$

$$\mathbf{s = 6000\ m}$$

20. Wie groß muß die Verzögerung einer gleichförmig verzögerten Bewegung sein, damit die Anfangsgeschwindigkeit eines Körpers in t Sekunden auf die Hälfte reduziert werde?

Auflösung: $v = c - pt$

$$\frac{c}{2} = c - pt$$

$$pt = \frac{c}{2}$$

$$p = \frac{c}{2t}$$

21. Eine Lokomotive mit 20 m Geschwindigkeit soll auf einer Strecke von 600 m durch Bremsen zum Stillstand gebracht werden. Welche Verzögerung muß ihr erteilt werden?

Auflösung:

$$v = c - pt = 0$$
$$c = pt = 20$$
$$s = \frac{v+c}{2} \cdot t = \frac{c}{2} t = 600$$
$$ct = 1200$$
$$20t = 1200$$
$$t = \frac{1200}{20} = 60''$$
$$p = \frac{20}{60}$$
$$\mathbf{p = \frac{1}{3}\ m}$$

22. Eine Kugel wird mit einer Geschwindigkeit von 10 m eine schiefe Ebene hinaufgestoßen und erreicht nach 20 Sekunden ihre höchste Lage. Mit welcher Verzögerung bewegte sich die Kugel, welchen Weg legte sie zurück und wann hatte sie die Geschwindigkeit von 4 m?

Auflösung: a)

$$v = c - pt = 0$$
$$c = pt$$
$$10 = p \cdot 20$$
$$\mathbf{p = 0{,}5\ m,}$$

b) $$s = \frac{v+c}{2} \cdot t = \frac{10}{2} \cdot 20 = 5 \cdot 20$$
$$\mathbf{s = 500\ m,}$$

c) $$4 = c - pt_1$$
$$4 = 10 - 0{,}5 \cdot t_1$$
$$0{,}5 t_1 = 6$$
$$t_1 = \frac{6}{0{,}5}$$
$$\mathbf{t_1 = 12\ Sek.}$$

23. Ein Projektil wird mit einer Geschwindigkeit von 600 m vertikal emporgeschossen. Nach welcher Zeit hat es die halbe Geschwindigkeit?

Auflösung:

$$300 = 600 - 9{,}81 \cdot t$$
$$9{,}81 \cdot t = 300$$
$$t = \frac{300}{9{,}81}$$
$$\mathbf{t \sim 30{,}5\ Sek.}$$

24. Zwei Punkte A und B sind vertikal voneinander um h Meter entfernt. Von A fällt ein Körper frei herab und von B wird gleichzeitig ein

anderer mit der Geschwindigkeit c vertikal nach aufwärts geworfen. Wann treffen sich beide Körper?

Auflösung:

$$\frac{g}{2}t^2 + ct - \frac{g}{2}t^2 = h$$

$$t = \frac{h}{c}$$

25. Ein Körper wird pro Sekunde um 5 m verzögert. Wenn er zur Ruhe kommt, hat er einen Weg von 360 m gemacht. Ein zweiter Körper hat die doppelte Anfangsgeschwindigkeit, erfährt dieselbe Verzögerung und bewegt sich 8 Sekunden lang. Wie lange hat sich der erste Körper bewegt, welche Anfangsgeschwindigkeiten hatten beide Körper und welchen Weg hat der zweite Körper zurückgelegt?

Auflösung: Für die erste Bewegung ist

$$0 = c_1 - 5t_1$$

$$c_1 = 5t_1 \text{ und}$$

$$360 = c_1 t_1 - \frac{5}{2}t_1^2$$

$$360 = 5t_1^2 - \frac{5}{2}t_1^2 = \frac{5}{2}t_1^2$$

$$\mathbf{t_1 = 12\ Sek.}$$

$$\mathbf{c_1 = 60\ m}$$

$$\mathbf{c_2 = 120\ m}$$

$$s_2 = \frac{120}{2} \cdot 8 = 60 \cdot 8$$

$$\mathbf{s_2 = 480\ m}$$

26. Ein Körper wurde vertikal emporgeschleudert und kam nach 40 Sekunden an die Ausgangstelle zurück. Wie groß berechnet sich seine Anfangsgeschwindigkeit, wenn auf Luftwiderstand keine Rücksicht zu nehmen ist?

Auflösung: Der Körper steigt ebenso viele Sekunden als er hernach fällt. Demnach beträgt die Fallzeit 20 Sekunden. Die Steighöhe ist $\frac{c^2}{2g}$, die Fallhöhe $\frac{0+c}{2} \cdot 20$. — Beide Werte gleichgesetzt, ergibt sich

$$\frac{c^2}{2g} = \frac{c}{2} \cdot 20 \quad \text{oder}$$

$$\frac{c}{g} = 20$$

$$\mathbf{c = 196{,}2\ m}$$

§ 4. Zusammensetzung und Zerlegung geradliniger Bewegungen.

In der Einleitung wurde schon gezeigt, daß ein Körper, welcher zwei geradlinige Bewegungen gleichzeitig machen muß, nach Ablauf einer bestimmten Zeit an den vierten Eckpunkt des aus den Seitenwegen konstruierten Parallelogrammes gelangt.

Es wird sich nun fragen, welche Linie der Körper beschreibt, wenn die Art der Seitenbewegungen gegeben ist.

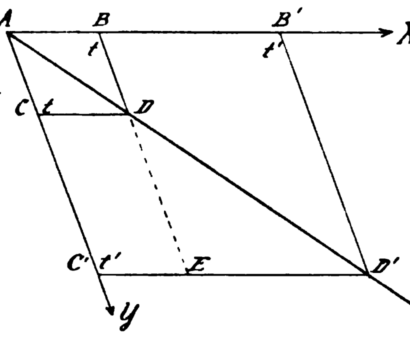


Fig. 5.

a) Beide Seitenbewegungen seien gleichförmige. Fig. 5.

Die Bewegung in der Richtung $\overline{AX}$ erfolge mit der Geschwindigkeit c, die in der Richtung $\overline{AY}$ mit der Geschwindigkeit γ. — Nach Ablauf der Zeit t befinde sich der Körper in der Richtung $\overline{AX}$ in B, in der Richtung $\overline{AY}$ in C, nach Ablauf der Zeit t' in der Richtung $\overline{AX}$ in B' in der Richtung $\overline{AY}$ in C'.

Dann ergeben sich die Beziehungen

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB} = c \cdot t \\ \overline{AB'} = c \cdot t'\end{array}\right\} \overline{BB'} = c\,(t' - t)$$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AC} = \gamma \cdot t \\ \overline{AC'} = \gamma \cdot t'\end{array}\right\} \overline{CC'} = \gamma\,(t' - t).$$

Nun folgt

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB} : \overline{BB'} = t : (t' - t) \\ \overline{AC} : \overline{CC'} = t : (t' - t)\end{array}\right\} \text{daraus}$$

$$\overline{AB} : \overline{BB'} = \overline{AC} : \overline{CC'} \text{ oder}$$

$$\overline{CD} : \overline{ED'} = \overline{AC} : \overline{DE}, \text{ d. h.}$$

$$\triangle ACD \sim \triangle DED', \text{ somit}$$

muß ADD' eine gerade Linie sein. Es ergibt sich also das Gesetz:

„Die resultierende Bewegung aus zwei gleichförmigen Seitenbewegungen ist eine geradlinige."

b) Beide Seitenbewegungen seien gleichförmig beschleunigte mit den Anfangsgeschwindigkeiten Null.

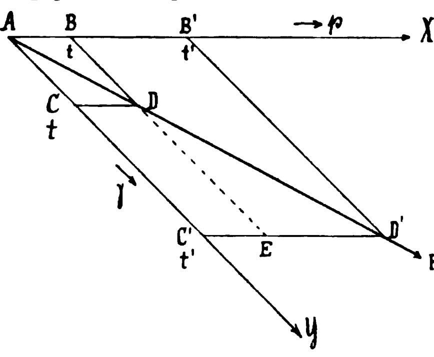


Fig. 6.

Die Beschleunigungen in den Richtungen $\overline{AX}$ und $\overline{AY}$ seien p und γ. Fig. 6.

Dann folgt analog wie früher

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB} = \frac{p}{2} t^2 \\ \overline{AB'} = \frac{p}{2} t'^2\end{array}\right\} \overline{BB'} = \frac{p}{2}(t'^2 - t^2)$$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AC} = \frac{\gamma}{2} t^2 \\ \overline{AC'} = \frac{\gamma}{2} t'^2\end{array}\right\} \overline{CC'} = \frac{\gamma}{2}(t'^2 - t^2)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{somit } \overline{AB} : \overline{BB'} = t^2 : (t'^2 - t^2) \\ \overline{AC} : \overline{CC'} = t^2 : (t'^2 - t^2)\end{array}\right\} \text{daraus}$$

$$\overline{AB} : \overline{BB'} = \overline{AC} : \overline{CC'} \text{ oder}$$

$$\overline{CD} : \overline{ED'} = \overline{AC} : \overline{DE}.$$

Demnach wieder $\triangle ACD \sim \triangle DED'$, so daß ADD' auch hier eine gerade Linie wird. Das Gesetz lautet daher:

„Die resultierende Bewegung aus zwei gleichförmig beschleunigten Seitenbewegungen mit den Anfangsgeschwindigkeiten Null ist eine geradlinige."

Die beiden letzten Sätze lassen sich in einen einzigen zusammenfassen, nämlich:

„Die resultierende Bewegung aus zwei gleichartigen Seitenbewegungen ist eine geradlinige."

c) Die Seitenbewegungen seien ungleichartige. Die Bewegung in der Richtung $\overline{AX}$ sei eine gleichförmige mit der Geschwindigkeit c, die in der Richtung $\overline{AY}$ eine gleichförmig beschleunigte mit der Anfangsgeschwindigkeit Null und mit der Beschleunigung p, Fig. 7.

Dann wird ebenso wie früher

$$\overline{AB} = c \cdot t \qquad \overline{AC} = \frac{p}{2} t^2$$

$$\overline{AB'} = c \cdot t' \qquad \overline{AC'} = \frac{p}{2} t'^2$$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB} : \overline{AC} = c : \frac{p}{2} t \\ \overline{AB'} : \overline{AC'} = c : \frac{p}{2} t'\end{array}\right\} \text{da } \frac{p}{2} t' > \frac{p}{2} t,$$

wird auch $\overline{AB} : \overline{AC} > \overline{AB'} : \overline{AC'}$

oder $\overline{AB} : \overline{BD} > \overline{AB'} : \overline{B'D'}$.

Fig. 7.

Dies ist der Fall, wenn ADD' eine Kurve ist. Es ergibt sich somit der Satz:

„Die resultierende Bewegung aus zwei ungleichartigen Seitenbewegungen ist eine krummlinige und wendet ihre konvexe Seite der gleichförmigen Seitenbewegung zu."

Die Zerlegung einer geradlinigen, auch einer krummlinigen Bewegung, in zwei Seitenbewegungen ist möglich, wenn entweder die Richtungen der letzteren oder Richtung und Art der einen Seitenbewegung gegeben sind.

---

§ 5. Die schwingende Bewegung als Komponente einer gleichförmigen Kreisbewegung.

Das Bewegliche A, Fig. 8, habe im Kreise die Geschwindigkeit c und die Umlaufszeit T. — Daher gilt

$$c \cdot T = 2 a \pi \text{ und}$$

$$c = \frac{2 a \pi}{T}$$

Die Kreisbewegung AM werde nun in Komponenten $\overline{AM_1}$ und $\overline{AM_2}$

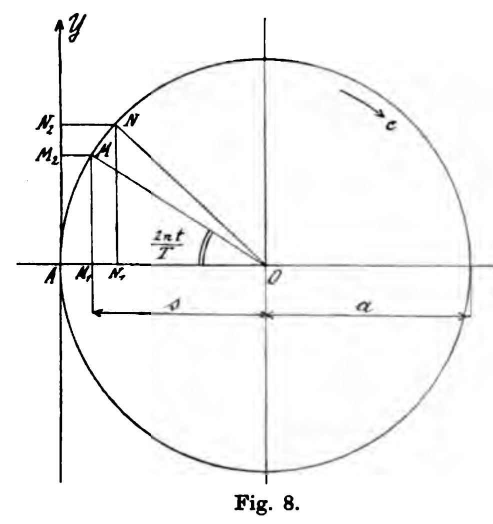


Fig. 8.

zerlegt. Untersucht soll nun die erstere, in der Richtung $\overline{AX}$ erfolgende Bewegung werden.

Die jeweilige Entfernung des Beweglichen vom Mittelpunkte O des Kreises wurde mit s bezeichnet. Dann ergibt sich für die Lage M_1

$$s = a \cdot \cos \alpha.$$

In einer Sekunde legt der Punkt A den Winkel $\frac{2\pi}{T}$ zurück, mithin in t Sekunden den Winkel $\alpha = \frac{2\pi}{T} \cdot t$. — Daher wird die Formel für s

$$\boldsymbol{s = a \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(17)}$$

Wird $t = o$, $t = \frac{T}{4}$, $t = \frac{T}{2}$, $t = \frac{3}{4}T$, $t = T$,

so wird $s = a$, $s = o$, $s = -a$, $s = o$, $s = +a$.

Die Entfernung des Beweglichen von O verändert sich also mit t. — a heißt **Schwingungsamplitude.**

In einer unendlich kleinen Zeit t kommt das Bewegliche im Kreise von M nach N, in der Richtung $\overline{AX}$ von M_1 nach N_1. — Die Geschwindigkeit in letzterer ist daher

$$v = \frac{\overline{M_1 N_1}}{\tau} = \frac{\overline{M_1 O} - \overline{N_1 O}}{\tau}$$

$$= \frac{a}{\tau} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) - a \cdot \cos\left[\frac{2\pi}{T}(t + \tau)\right]$$

Da $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$ ist, wird

$$v = -\frac{2a}{\tau} \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi\tau}{T}\right) \cdot \sin\left(-\frac{\pi\tau}{T}\right)$$

$$v = \frac{2a}{\tau} \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi\tau}{T}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi\tau}{T}\right)$$

Nun kann wegen der Kleinheit von $\frac{\pi\tau}{T}$ statt $\sin\frac{\pi\tau}{T}$ der Bogen $\frac{\pi\tau}{T}$ selbst gesetzt werden; aus eben demselben Grunde darf $\frac{\pi\tau}{T}$ gegen $\frac{2\pi t}{T}$ vernachlässigt werden, so daß

$$v = \frac{2a}{\tau} \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \cdot \frac{\pi\tau}{T} \text{ oder}$$

$$v = \frac{2a\pi}{T} \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \text{ wird.}$$

$$\frac{2a\pi}{T} = c, \text{ daher}$$

$$\boldsymbol{v = c \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

für $t = o$, $t = \frac{T}{4}$, $t = \frac{T}{2}$, $t = \frac{3}{4}T$, $t = T$

werden $v = o$, $v = c$, $v = o$, $v = -c$, $v = o$

„Das Maximum der Geschwindigkeit der schwingenden Bewegung ist in O, die Minima sind in den Punkten A und B vorhanden."

In N_1 ist die Geschwindigkeit $v_1 = c \cdot \sin\left[\frac{2\pi(t+\tau)}{T}\right]$

Daher wird die Beschleunigung dort

$$b = \frac{v_1 - v}{\tau} = \frac{c \cdot \sin\left[\frac{2\pi(t+\tau)}{T}\right] - c \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)}{\tau}$$

Da $\sin x - \sin y = \frac{1}{2} \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2}$ ist, wird

$$b = \frac{c}{\tau} \cdot 2 \sin\left(\frac{\pi\tau}{T}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi\tau}{T}\right)$$

$$b = 2\frac{c}{\tau} \cdot \frac{\pi\tau}{T} \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \text{ also}$$

$$b = \frac{2\pi c}{T} \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = \frac{2\pi c}{T} \cdot \frac{s}{a}$$

für $c = \frac{2a\pi}{T}$ substituiert, wird auch

$$b = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{2a\pi}{T} \cdot \frac{s}{a} = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot s$$

Demnach ergibt sich die Beziehung

$$\boldsymbol{b = \frac{2\pi c}{T} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = \frac{2\pi c}{T} \cdot \frac{s}{a} = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot s} \qquad \ldots\ldots \quad (19)$$

„Die Beschleunigung bei einer schwingenden Bewegung ist der Entfernung des Beweglichen von seiner Mittellage proportional."

Für $t = 0$, $t = \frac{T}{4}$, $t = \frac{T}{2}$, $t = \frac{3}{4}T$, $t = T$

wird $b = \frac{2\pi c}{T}$, $b = 0$, $b = -\frac{2\pi c}{T}$, $b = 0$, $b = \frac{2\pi c}{T}$.

Beispiele.

27. Welchen Abstand vom Mittel hat ein in einer Horizontalen schwingender Punkt nach $^1/_8$ der ganzen Schwingungszeit?

Auflösung:

$$s = a \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot \frac{T}{8}}{T}\right) = a \cos \frac{\pi}{4}$$

$$s = a \cdot \cos 45^0$$

$$\mathbf{s = 0{,}707\, a},$$

d. h. die Entfernung des schwingenden Punktes vom Mittel beträgt 70,7 $^0/_0$ der Schwingungsamplitude.

28. Wie verhält sich die Geschwindigkeit eines schwingenden Punktes nach $^1/_8$ der ganzen Schwingungszeit zu derjenigen im Kreise, aus welchem die schwingende Bewegung abgeleitet ist?

$$v = c \sin \frac{\pi}{4} = 0{,}707\, c$$

$$\frac{v}{c} = 0{,}707 = \frac{1}{x}$$

$$x = \frac{1}{0{,}707} = \frac{1}{1{,}414}$$

$$\mathbf{v : c = 1 : 1{,}414}$$

29. Nach welcher Zeit wird die Geschwindigkeit einer schwingenden Bewegung gleich der Hälfte von derjenigen im Kreise, aus welchem die schwingende Bewegung abgeleitet ist?

Auflösung:

$$v = c \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = \frac{c}{2}$$

$$\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2\pi t}{T} = 30^0 = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{2t}{T} = \frac{1}{6}$$

$$\mathbf{t = \frac{T}{12}}$$

d. h. nach $^1/_{12}$ der ganzen Schwingungszeit.

30. In welchem Verhältnis stehen mittlere und maximale Geschwindigkeit einer schwingenden Bewegung, wenn das Bewegliche in der Minute n Schwingungen mit der Schwingungsamplitude a macht?

Auflösung: Die mittlere Geschwindigkeit ist $\frac{2 \cdot 2a \cdot n}{60} = \frac{an}{15}$, die maximale Geschwindigkeit ist $c = \frac{2a\pi n}{60} = \frac{a\pi n}{30}$.

Daher

$$\frac{an}{15} : \frac{a\pi n}{30} = 1 : \frac{\pi}{2}$$

Mittl. Geschw. zu max. Geschw. $= 2 : \pi$.

Eine schwingende Bewegung ist z. B. diejenige des Kolbens (oder Kreuzkopfs) einer Dampfmaschine. Wäre die Schubstange unendlich lang, dann ergäbe sich die Kolbenbewegung als Komponente der Bewegung des Kurbelzapfens und es ließe sich sagen:

„Die mittlere Kolbengeschwindigkeit verhält sich zur Geschwindigkeit des Kurbelzapfens wie $2:\pi$."

§ 6. Der Kurbeltrieb.

Zwischen den Kurbeldrehungswinkeln und den Kolben- oder Kreuzkopfwegen von Dampfmaschinen (Gasmotoren u. dgl.) existiert eine einfache Beziehung, welche im folgenden hergeleitet werden soll.

In Fig. 9 bedeutet $\overline{aO} = R$ die Kurbellänge und $\overline{Aa} = L\,(= 4 \div 5\,R)$ die Schubstangenlänge. Dreht sich nun die Kurbel aus ihrer Totlage um den

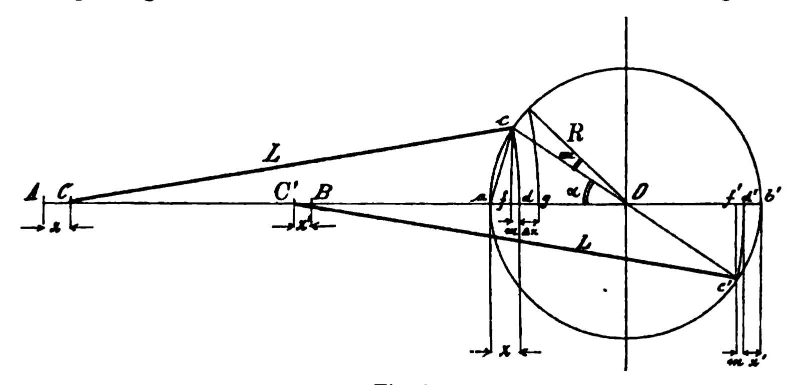


Fig. 9.

Winkel α, dann kommt die Schubstange in die Lage Cc, so daß der Kreuzkopf und mit ihm der Kolben um $\overline{AC} = x$ aus seiner linken Totlage gezogen worden ist. Schlägt man nun aus C mit dem Halbmesser L den Bogen $\overline{cd}$, so ist $\overline{ad} = x$, d. h. ebenfalls der Kolbenweg.

Beweis:

$$
\begin{aligned}
\overline{Ad} &= \overline{Aa} + \overline{ad} = L + \overline{ad} \quad \text{oder} \\
\overline{Ad} &= \overline{dC} + \overline{AC} = L + x, \quad \text{folglich} \\
L + x &= L + \overline{ad} \quad \text{oder} \\
\overline{ad} &= x
\end{aligned}
$$

Im Rückgange ist für denselben Kurbeldrehungswinkel der zugehörige Kolbenweg $\overline{b'd'}$.

Wäre die Schubstange unendlich lang, dann wäre der Kolbenweg im Hingange $\overline{af}$ und im Rückgange $\overline{bf'}$. Diese Wege sind einander gleich, denn

$$\triangle\, Oac \backsim \triangle\, Ob'c'$$

so daß auch $\triangle\, afc \backsim \triangle\, bc'f'$ ist, woraus sich

$$af = bf' \qquad (20)$$

ergibt. Demnach folgt der Satz:

„Die Kolbenwege sind bei unendlich langen Schubstangen für gleiche Kurbeldrehungswinkel im Hin- und Rückgange einander gleich."

Bei endlich langen Schubstangen ist der Kolbenweg im Hingange indes um $\overline{fd}$ größer, im Rückgange um $\overline{f'd'}$ kleiner als derjenige bei unendlich langen Schubstangen. Wegen $\overline{cf} = \overline{c'f'}$ und $\overline{Cc} = \overline{C'c'}$ ist

$$\triangle Ccf \cong \triangle C'c'f', \text{ daher}$$

$$\overline{Cf} = \overline{C'f'}, \text{ da auch}$$

$$\overline{Cd} = \overline{C'd'} \text{ ist, folgt}$$

$$\overline{Cd} - \overline{Cf} = \overline{C'd'} - \overline{C'f'}, \text{ somit}$$

$$\boldsymbol{fd = f'd'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

D. h.: „Bei endlich langen Schubstangen sind die Kolbenwege für gleiche Kurbeldrehungswinkel im Hingange größer und im Rückgange um dasselbe Stück kleiner als die Kolbenwege bei unendlich langen Schubstangen.“

Nun ist .... $\overline{af} = \overline{bf'} = R(1 - \cos\alpha)$

$$x = R(1 - \cos\alpha) \pm \overline{fd},$$

wobei das Pluszeichen für Hin-, das Minuszeichen für Rückgang zu nehmen ist.

$$\overline{fd} = \overline{Cd} - \overline{Cf} = L - \sqrt{L^2 - R^2 \sin^2\alpha} = L - L\sqrt{1 - \frac{R^2}{L^2}\sin^2\alpha}$$

$$\overline{fd} = L - L\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{R^2}{L^2}\sin^2\alpha - \frac{1}{8}\cdot\frac{R^4}{L^4}\sin^4\alpha - \ldots\ldots\right).$$

In der Klammer können die Glieder vom dritten ab wegen ihrer Kleinheit vernachlässigt werden.

Daher wird $\quad fd = L - L + \frac{1}{2}\cdot\frac{R^2}{L}\cdot\sin^2\alpha.$

Die Formel für den Kolbenweg ergibt sich dann mit

$$\boldsymbol{x = R\cdot\left[1 - \cos\alpha \pm \frac{1}{2}\cdot\frac{R}{L}\cdot\sin^2\alpha\right]} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Der Hub S des Kolbens wird bei einer Umdrehung der Kurbel 2 mal, bei n Umdrehungen derselben, d. i. in einer Minute, $2n$ mal gemacht. Somit ist der Kolbenweg in der Minute $2S\cdot n$, daher in einer Sekunde

$$\boldsymbol{c_m = \frac{2S\cdot n}{60} = \frac{S\cdot n}{30}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

c_m heißt die **mittlere Kolbengeschwindigkeit.** Die Geschwindigkeit des Kurbelzapfens ist

$$v = \frac{2R\pi n}{60} = \frac{S\pi n}{60}.$$

Es folgt demnach $\quad v : c_m = \frac{S\pi n}{60} : \frac{Sn}{30} \quad$ oder

$$\boldsymbol{v : c_m = \pi : 2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Da die Kolbenbewegung aber eine ungleichförmige ist, ist die Kolbengeschwindigkeit jeden Augenblick eine andere, vom jeweiligen Kurbeldrehungswinkel abhängige.

Um sie abzuleiten, denke man sich die Kurbel um den unendlich kleinen Winkel $\triangle\alpha$ weitergedreht. Dann nimmt der Kolbenweg um $\overline{dg} = \triangle x$ zu. Für den Kurbeldrehungswinkel $(\alpha + \triangle\alpha)$ ist der letztere

$$x + \triangle x = R \cdot \left[1 - \cos(\alpha + \triangle\alpha) \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{L} \cdot \sin^2(\alpha + \triangle\alpha)\right].$$

Zieht man von dieser Gleichung die Gleichung (22) ab, so wird

$$\triangle x = R[\cos\alpha - \cos(\alpha + \triangle\alpha)] \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{L} \cdot \sin^2(\alpha + \triangle\alpha) \mp \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{L} \sin^2\alpha \text{ oder}$$

$$\triangle x = R[\cos\alpha - \cos(\alpha + \triangle\alpha)] \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{L} \cdot [\sin^2(\alpha + \triangle\alpha) - \sin^2\alpha].$$

Das Verhältnis des kleinen Weges $\triangle x$ zur ebenso kleinen Zeit $\triangle t$, in welcher derselbe zurückgelegt worden ist, ist die Kolbengeschwindigkeit c. — Dieselbe wird also

$$c = \frac{R\,[\cos\alpha - \cos[\alpha + \triangle\alpha] \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{L} \cdot [\sin^2(\alpha + \triangle\alpha) - \sin^2\alpha]}{\triangle t}$$

$$c = \frac{R \cdot \left[-2\sin\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(-\frac{\triangle\alpha}{2}\right)\right] \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{L} \cdot [\sin(\alpha + \triangle\alpha) + \sin\alpha] \cdot [\sin(\alpha + \triangle\alpha) - \sin\triangle\alpha]}{\triangle t}$$

$$c = \frac{2R\sin\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right)\sin\frac{\triangle\alpha}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{L} \cdot 2\sin\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right)\cos\frac{\triangle\alpha}{2} \cdot 2\sin\frac{\triangle\alpha}{2} \cdot \cos\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right)}{\triangle t}$$

Da der Winkel $\frac{\triangle\alpha}{2}$ sehr klein ist, kann statt dessen Sinus derselbe selbst gesetzt werden, so daß sich ergibt

$$c = \frac{2R\sin\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right) \cdot \frac{\triangle\alpha}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{L} \cdot 2\sin\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right)\cos\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right) 2 \cdot \frac{\triangle\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\triangle\alpha}{2}}{\triangle t}$$

$$c = 2R\sin\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\triangle\alpha}{\triangle t} \pm \frac{R^2}{L} \sin\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right)\cos\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right] \cdot \cos\frac{\triangle\alpha}{2} \cdot \frac{\triangle\alpha}{\triangle t}.$$

$\frac{\triangle\alpha}{\triangle t}$ ist das Verhältnis aus der Änderung des Kurbeldrehungswinkels und der Zeit, in welcher diese erfolgt, ist daher die **Winkelgeschwindigkeit der Kurbel** ω, somit bestimmt sich c mit

$$c = R\omega \cdot \sin\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right) \pm \frac{R^2}{L} \cdot \omega \cdot \sin\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right)\cos\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right) \cdot \cos\frac{\triangle\alpha}{2}.$$

Da ω am Radius 1 gemessen ist, wird $R \cdot \omega$ der Bogen am Radius R, d. h. die Größe der **Geschwindigkeit v des Kurbelzapfens.** Wegen der Kleinheit kann $\frac{\triangle\alpha}{2}$ gegen α vernachlässigt und $\cos\frac{\triangle\alpha}{2} \sim 1$ gesetzt werden, so daß endlich

$$c = v \cdot \sin\alpha \pm \frac{R^2}{L} \cdot \frac{v}{R} \sin\alpha\cos\alpha$$

wird. (Die Formeln für Winkelgeschwindigkeit ω und Bahngeschwindigkeit $v = R \cdot \omega$ sind in der Dynamik nochmals angeführt; s. § 53). — Die Formel für die Kolbengeschwindigkeit c lautet also

$$c = v\left(\sin\alpha + \frac{R}{2L}\sin 2\alpha\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Ebenso läßt sich die Kolbenbeschleunigung herleiten. Sie ist zu bilden als Verhältnis aus der Änderung der Kolbengeschwindigkeit und der Zeit, in welcher dieselbe stattfindet.

Die Kolbengeschwindigkeit zur Zeit $(t + \triangle t)$, das ist dann, wenn sich die Kurbel um den Winkel $(\alpha + \triangle\alpha)$ gedreht hat, ist

$$c + \triangle c = v\left[\sin(\alpha + \triangle\alpha) \pm \frac{R}{2L} \cdot \sin 2(\alpha + \triangle\alpha)\right].$$

Wird von dieser Gleichung die Gleichung (25) abgezogen, so ergibt sich

$$\triangle c = v\left[\sin(\alpha + \triangle\alpha) - \sin\alpha\right] \pm v \cdot \frac{R}{2L}\left[\sin 2(\alpha + \triangle\alpha) - \sin 2\alpha\right].$$

Demnach wird die Kolbenbeschleunigung

$$p = \frac{\triangle c}{\triangle t} = \frac{v \cdot 2\cos\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right) \cdot \sin\frac{\triangle\alpha}{2} \pm v \cdot \frac{R}{2L} \cdot 2\cos(2\alpha + \triangle\alpha)\sin(\triangle\alpha)}{\triangle t}$$

$$p = v \cdot 2\cos\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\triangle\alpha}{\triangle t} \pm v \cdot \frac{R}{L}\cos(2\alpha + \triangle\alpha) \cdot \frac{\triangle\alpha}{\triangle t}$$

$$p = v \cdot \cos\alpha \cdot \omega \pm v \cdot \frac{R}{L} \cdot \omega \cdot \cos 2\alpha.$$

Nun ist $\omega = \frac{v}{R}$, so daß sich endlich schreiben läßt

$$p = \frac{v^2}{R}\left(\cos\alpha \pm \frac{R}{L}\cos 2\alpha\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Beispiele.

31. Wie groß sind bei $\frac{R}{L} = \frac{1}{5}$ die zu den Kurbeldrehungswinkeln $\alpha = 45^0$, 90^0 und 135^0 zugehörigen Kolbenwege?

Auflösung: a) $x = R(1 - \cos 45^0 + 0{,}1 \sin^2 45)$
$= R(1 - 0{,}707 + 0{,}1 \cdot 0{,}707^2)$
$= R(1 - 0{,}707 + 0{,}05) = R(1{,}05 - 0{,}707)$
$\mathbf{x = 0{,}343\,R = 0{,}17 \cdot 2\,R}$

b) $x = R(1 - \cos 90^0 + 0{,}1 \cdot \sin^2 90^0) = R(1 - 0 + 0{,}1)$
$\mathbf{x = 1{,}1\,R = 0{,}55 \cdot 2\,R}$

c) $x = R(1 - \cos 135^0 + 0{,}1 \cdot \sin^2 135^0)$
$= R(1 + 0{,}707 + 0{,}05) = R(1{,}05 + 0{,}707)$
$\mathbf{x = 1{,}757\,R = 0{,}878 \cdot 2\,R}$

32. Wie groß sind bei $\frac{R}{L} = \frac{1}{4}$ die zu den Kurbeldrehungswinkeln $\alpha = 45^0$, 90^0 und 135^0 zugehörigen Kolbenwege?

Auflösung: a) $x = R(1 - \cos 45 + 0{,}125 \cdot \sin^2 45)$

$$= R(1 - 0{,}707 + 0{,}125 \cdot 0{,}5)$$
$$= R(1{,}063 - 0{,}707)$$
$$\boldsymbol{x = 0{,}356\,R = 0{,}18 \cdot 2\,R}$$

b) $x = R(1 - \cos 90^0 + \frac{1}{8} \cdot \sin^2 90)$

$$= R(1 + 0{,}125)$$
$$\boldsymbol{x = 1{,}125\,R = 0{,}563 \cdot 2\,R}$$

c) $x = R(1 + \cos 45 + 0{,}125 \cdot \sin^2 45)$

$$= R(1{,}707 + 0{,}125 \cdot 0{,}5)$$
$$\boldsymbol{x = 1{,}77\,R = 0{,}885 \cdot 2\,R}$$

33. Bei welchem Kurbeldrehungswinkel, bzw. nach welchem Kolbenweg, wird die Kolbenbeschleunigung Null, wenn $\frac{R}{L}$ a) gleich $^1/_5$, b) gleich $^1/_4$ ist?

Auflösung: a) $p = \frac{v^2}{r} \cdot \left(\cos\alpha + \frac{1}{5}\cos 2\alpha\right) = 0$

$$5\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0$$
$$5\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = 0$$
$$\cos^2\alpha + \frac{5}{4}\cos\alpha - \frac{1}{2} = 0$$
$$\cos\alpha = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{1}{2}}$$
$$\cos\alpha = \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{4} = \frac{-5 + 5{,}7446}{4}$$
$$\cos\alpha = 0{,}186$$
$$\boldsymbol{\alpha = 79^0\,20'}$$
$$x = R(1 - \cos 79^0 20' + 0{,}1 \sin^2 79^0 20') = R(1 - 0{,}186 + 0{,}1 \cdot 0{,}983^2)$$
$$x = R(1 - 0{,}186 + 0{,}097) = R(1{,}097 - 0{,}186)$$
$$\boldsymbol{x = 0{,}911\,R = 0{,}456 \cdot 2\,R}$$

b) $\cos\alpha + \frac{1}{4}\cos 2\alpha = 0$

$$4\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0$$
$$4\cos\alpha + \cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha = 0$$
$$\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - \frac{1}{2} = 0$$
$$\cos\alpha = -1 \pm \sqrt{1 + \frac{1}{2}} = -1 \pm \sqrt{1{,}5}$$
$$\cos\alpha = -1 + 1{,}225 = 0{,}225$$
$$\boldsymbol{\alpha = 77^0}$$

$$x = R(1 - \cos 77 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \sin^2 77) = R(1 - 0{,}225 + \frac{1}{8} \cdot 0{,}974^2)$$

$$x = R(1 - 0{,}225 + \frac{1}{8} \cdot 0{,}95)$$

$$x = R(1 - 0{,}225 + 0{,}12)$$

$$x = R(1{,}12 - 0{,}225)$$

$$\boldsymbol{x = 0{,}895\, R = 0{,}448 \cdot 2\, R}$$

34. Nach welchem Kurbeldrehungswinkel, bzw. nach welchem Kolbenweg, ist die Kolbenbeschleunigung 6 mal so klein wie die in der Kolbentotlage? $\frac{r}{L} = \frac{1}{5}$

Auflösung: Bei $\alpha = 0$ ist $p = \frac{v^2}{R}(\cos 0 + \frac{1}{5} \cdot \cos 2\alpha)$

$$= \frac{v^2}{R} \cdot \left(1 + \frac{1}{5}\right) = \frac{6}{5} \cdot \frac{v^2}{R}$$

$$\frac{v^2}{R}(\cos\alpha + \frac{1}{5}\cos 2\alpha) = \frac{v^2}{5R} \text{ oder}$$

$$\cos\alpha + \frac{1}{5}\cos 2\alpha = \frac{1}{5}$$

$$5\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = 1$$

$$\cos^2\alpha + \frac{5}{2}\cos\alpha - 1 = 0$$

$$\cos\alpha = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} + 1} = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{41}{16}} = -\frac{5}{4} + \frac{6{,}4031}{4}$$

$$\cos\alpha = \frac{1{,}4031}{4} = 0{,}3508$$

$$\boldsymbol{\alpha = 69^0\, 30'}$$

$$x = R(1 - 0{,}3508 + 0{,}1 \cdot 0{,}937^2) = R(1 - 0{,}3508 + 0{,}088)$$

$$= R(1{,}088 - 0{,}351)$$

$$\boldsymbol{x = 0{,}737\, R \sim 0{,}368 \cdot 2\, R}$$

35. Wann wird der numerische Wert der Kolbenverzögerung bei $\frac{R}{L} = \frac{1}{5}$ sechsmal so klein wie derjenige der Kolbenbeschleunigung in der Kolbentotlage?

Auflösung: $\frac{v^2}{R}(\cos\alpha + \frac{1}{5}\cos 2\alpha) = -\frac{1}{5} \cdot \frac{v^2}{R}$

$$\cos\alpha + \frac{1}{5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{5}$$

$$5\cos\alpha + \cos 2\alpha + 1 = 0$$

$$5\cos\alpha + \cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha + 1 = 0$$

$$5\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0$$

$$\cos\alpha = 0$$

$$\boldsymbol{\alpha = 90^0}$$

$$5 + 2\cos\alpha = 0$$

Der andere Wert $\cos\alpha = -\frac{5}{2}$ ist unbrauchbar.

§ 7. Der schiefe Wurf.

Ein unter einem bestimmten Winkel mit einer gewissen Geschwindigkeit geworfener Körper beschreibt unter Nichtberücksichtigung des Luftwiderstandes eine Kurve, deren konvexe Seite der Wurfrichtung und deren hohle Seite der Horizontalen zugewendet ist. Im folgenden sollen die Gesetze dieser Bewegung untersucht werden. Fig. 10.

Würde der Körper anfangs von keiner Kraft beeinflußt sein, so wäre seine Bewegung eine geradlinige, gleichförmige. Nun ist dies eben nicht der

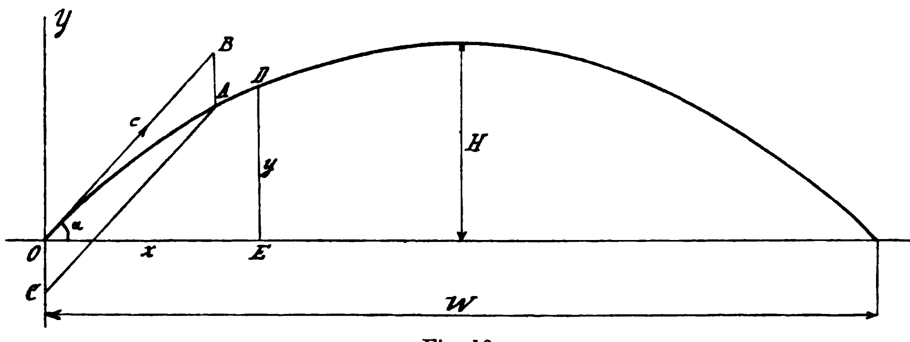


Fig. 10.

Fall. Nach der ersten Sekunde ist der Körper bereits durch die Schwerkraft von seiner Richtung um das Stück $\overline{BA}$ nach abwärts gezogen worden; er beschreibt den Weg $\overline{OA}$.

Behufs Vereinfachung der Betrachtung werde nun die Wurfbahn nicht mehr als Resultierende aus der gleichförmigen Bewegung in der Richtung $\overline{OB}$ und der freien Fallbewegung in der Richtung $\overline{OC}$ (gleich $\overline{BA}$), sondern als Resultierende aus der gleichförmigen Bewegung $\overline{OE}$ und der gleichförmig verzögerten $\overline{ED}$ angesehen.

Die Geschwindigkeit der Bewegung $\overline{OE}$ ist $c \cdot \cos \alpha$, die Anfangsgeschwindigkeit der Bewegung $\overline{ED}$ ist $c \cdot \sin \alpha$.

Kommt nun der Körper in t Sekunden nach D, so sind seine Wege in horizontaler und vertikaler Richtung

$$x = c \cdot \cos \alpha \cdot t \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (27)$$

$$\text{und } y = c \cdot \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (28)$$

Die **Wurfzeit** ergibt sich aus der Erwägung, daß für sie $y = 0$ sein muß. Es muß also sein

$$c \sin \alpha \cdot t = \frac{1}{2} g t^2, \text{ woraus}$$

$$t = \frac{2 c \sin \alpha}{g} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (29)$$

wird. Wird dieser Wert in x eingesetzt, so ergibt sich die **Wurfweite**

$$W = c \cdot \cos\alpha \frac{2c\sin\alpha}{g} = \frac{c^2}{g} \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \text{ oder}$$

$$W = \frac{c^2}{g} \cdot \sin 2\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

Da $\sin 2\alpha = \sin[180 - 2\alpha]$ ist, folgt, daß die Wurfweiten bei den Wurfwinkeln α und $(90 - \alpha)$ gleich groß werden.

Die **Wurfhöhe** H folgt aus y, wenn man in dessen Gleichung für t den halben Wert aus (29) einsetzt.

$$H = c\sin\alpha \cdot \frac{c\sin\alpha}{g} - \frac{1}{2} g \cdot \frac{c^2\sin^2\alpha}{g^2} = \frac{c^2\sin^2\alpha}{g} - \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2\sin^2\alpha}{g}, \text{ somit}$$

$$H = \frac{c^2 \cdot \sin^2\alpha}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

Die Beziehung zwischen den Größen y und x heißt die Gleichung der Wurfkurve. Es waren

$$x = c \cdot \cos\alpha \cdot t$$

$$y = c\sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Aus ersterer Gleichung ist $t = \frac{x}{c \cdot \cos\alpha}$.

Nach Substitution dieses Wertes in die Gleichung für y folgt dann

$$y = c \cdot \sin\alpha \cdot \frac{x}{c\cos\alpha} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{c^2\cos^2\alpha} = x \cdot \operatorname{tg}\alpha - \frac{g x^2}{2c^2\cos^2\alpha} = x\operatorname{tg}\alpha \left[1 - \frac{x}{2\frac{c^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha}\right]$$

$$y = x\operatorname{tg}\alpha\left(1 - \frac{x}{W}\right)$$

$$\text{Nun } \left.\begin{aligned} W &= \frac{c^2}{g} \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha \\ H &= \frac{c^2}{2g} \cdot \sin^2\alpha \end{aligned}\right\} \frac{W}{H} = \frac{\frac{c^2}{2g}\sin^2\alpha}{\frac{c^2}{g} \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{4}\operatorname{tg}\alpha$$

$$\text{Demnach } \operatorname{tg}\alpha = 4\frac{H}{W}$$

$$\text{Es wird also } y = x\operatorname{tg}\alpha\left(1 - \frac{x}{W}\right) = 4\frac{H}{W}x\left(1 - \frac{x}{W}\right)$$

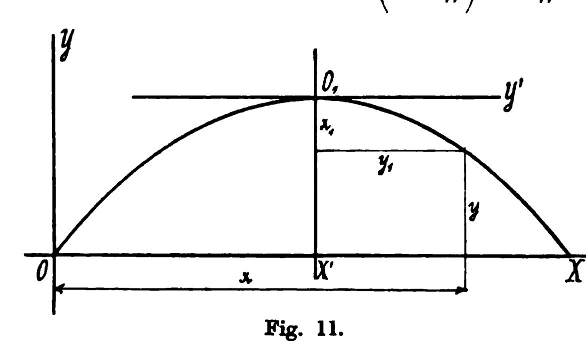


Fig. 11.

Diese Gleichung der Wurfkurve läßt deren Art nicht erkennen. Die Kurve werde deshalb auf die Achsen $\overline{O_1 X'}$ (Symetrieachse) und $\overline{O_1 Y'}$ (Scheiteltangente) bezogen, Dann ist zu setzen für

$$x = y_1 + \frac{W}{2}$$

$$y = H - x_1, \text{ Fig. 11.}$$

Es wird dann

$$y = (H - x_1) = 4\,\frac{H}{W}\left(\frac{W}{2} + y_1\right)\cdot\left[1 - \frac{\frac{W}{2} + y_1}{W}\right]$$

$$H - x_1 = \frac{4\,H}{W^2}\cdot\left(\frac{W}{2} + y_1\right)\cdot\left(\frac{W}{2} - y_1\right)$$

$$H - x_1 = \frac{4\,H}{W^2}\cdot\left(\frac{W^2}{4} - y_1^2\right)$$

$$H - x_1 = H - \frac{4\,H}{W^2}\cdot y_1^2 \text{ oder}$$

$$y_1^2 = \frac{W^2}{4\,H}\cdot x_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

Diese Gleichung gehört einer Parabel an; deren Parameter ist

$$p = \frac{W^2}{8\,H} = \frac{\left(\frac{c^2}{g}\right)^2\cdot\left(2\sin\alpha\cos\alpha\right)^2}{8\,\frac{c^2}{2\,g}\sin^2\alpha} \text{ oder}$$

$$p = \frac{c^2}{g}\cdot\cos^2\alpha.$$

Beispiele.

36. Mit welcher Geschwindigkeit und mit welcher Elevation muß ein Projektil gegen die Spitze eines Turms, welcher 600 m entfernt und 246,84 m hoch ist, abgeschlossen werden, damit es dieselbe in 8,5 Sekunden erreiche? Fig. 12.

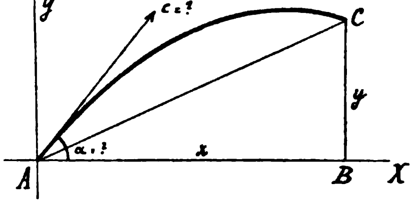


Fig. 12.

Auflösung:

$$x = c\cdot\cos\alpha\cdot t$$

$$y = c\cdot\sin\alpha\cdot t - {}^1/_2\,g t^2$$

$$600 = 8{,}5\cdot c\cos\alpha$$

$$246{,}84 + 0{,}5\cdot 9{,}81\cdot 8{,}5^2 = 8{,}5\cdot c\cdot\sin\alpha$$

Durch Division beider Gleichungen wird

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{246{,}84 + 05\cdot 9{,}81\cdot 8{,}5^2}{600}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{246{,}84 + 353{,}16}{600} = 1$$

$$\alpha = 45^0$$

Aus $x = 8{,}5\cdot c\cdot\cos 45$ wird $c = \frac{600}{8{,}5\cdot 0{,}707}$, also

$$c \sim 100\text{ m}$$

37. Unter welcher Elevation muß ein Körper geworfen werden, damit
a) die Wurfweite und Steighöhe gleich werden,
b) die Wurfweite viermal so groß werde wie die Steighöhe?

Auflösung:

$$W = \frac{c^2}{g} \cdot \sin 2\alpha$$

$$H = \frac{c^2}{2g} \cdot \sin^2 \alpha$$

$$\text{a) } W = H \ldots . \frac{c^2}{g} \sin 2\alpha = \frac{c^2}{2g} \sin^2 \alpha$$

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 4$$

$$\alpha = 76^0$$

$$\text{b) } W = 4H \ldots . \frac{c^2}{g} \cdot \sin 2\alpha = 4 \frac{c^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 1$$

$$\alpha = 45^0$$

38. Unter welchem Winkel gegen den Horizont muß ein Geschoß, welches eine Anfangsgeschwindigkeit c hat, abgeschossen werden, damit es die Spitze eines Turmes, welcher d Meter entfernt und h Meter hoch ist, treffe?

Auflösung:

$$x = c \cdot \cos \alpha \cdot t$$

$$y = c \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$t = \frac{x}{c \cos \alpha}$$

$$y = c \sin \alpha \cdot \frac{x}{c \cos \alpha} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{c^2 \cdot \cos^2 \alpha}$$

$$y = d \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2} g \cdot \frac{d^2}{c^2 \cdot \cos^2 \alpha} = h$$

$$h = d \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g d^2}{2 c^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)$$

$$\frac{2 h c^2}{g d^2} = \frac{2 d c^2}{g d^2} \operatorname{tg} \alpha - 1 - \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{2 c^2}{g d} \operatorname{tg} \alpha + 1 + \frac{2 h c^2}{g d^2} = 0$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{c^2}{g d} \pm \sqrt{\frac{c^4}{g^2 d^2} - 1 - \frac{2 h c^2}{g d^2}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{c^2 \pm \sqrt{c^2 (c^2 - 2 g h) - g^2 d^2}}{g d}$$

39. Zwei Körper werden mit gleicher Geschwindigkeit schief geworfen. Wie groß sind ihre Wurfwinkel, wenn die Steighöhe des ersten Körpers 4 mal so groß ist als die des zweiten?

Auflösung: Die Wurfwinkel betragen zusammen 90°, also

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 90^0$$

$$\text{hierzu } \frac{c^2}{2g}\sin^2\alpha_1 = 4\frac{c^2}{2g}\sin^2\alpha_2$$

$$\sin^2\alpha_1 = 4\sin^2(90 - \alpha_1)$$

$$\sin\alpha_1 = 2\cos\alpha_1$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = 2$$

$$\alpha_1 = \mathbf{63^0\,30'}$$

$$\alpha_2 = \mathbf{26^0\,30'}$$

40. Eine Kanone wird auf die Spitze eines Turmes gerichtet. Der Schuß trifft in t Sekunden den Turm in der Horizontalebene durch die Kanone. Ein zweiter Schuß mit andrer Ladung und doppelter Elevation trifft die Spitze des Turms in t_1 Sekunden. Wie weit ist der Turm entfernt? Fig. 13.

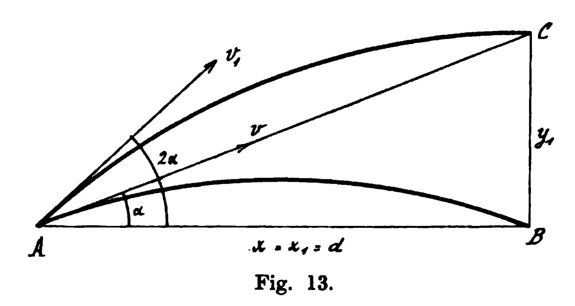


Fig. 13.

Auflösung: Es seien die unter α und 2α gerichteten Geschwindigkeiten v und v_1.

Dann gelten die Gleichungen:

$$x = v\cos\alpha \cdot t \qquad\qquad x_1 = v_1 \cdot \cos 2\alpha \cdot t_1$$

$$y = v\sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad\qquad y_1 = v_1 \sin 2\alpha \cdot t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2$$

Aus den beiden Gleichungen folgt

$$\left.\begin{aligned} d &= v\cos\alpha \cdot t \\ \frac{1}{2}gt^2 &= v\cdot\sin\alpha\cdot t \end{aligned}\right\} \operatorname{tg}\alpha = \frac{gt^2}{2d}$$

Aus den beiden andern ebenso:

$$\left.\begin{aligned} d &= v_1 \cos 2\alpha \cdot t_1 \\ y_1 + \frac{1}{2}gt_1^2 &= v_1 \sin 2\alpha \cdot t_1 \end{aligned}\right\} \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{y_1 + \frac{1}{2}gt_1^2}{d}$$

Da $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha}$ ist und ferner $y_1 = d\cdot\operatorname{tg}\alpha$ wird, folgt

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{d \cdot \operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{2} g t_1^2}{d} = \frac{2 \frac{g t^2}{2d}}{1 - \frac{g^2 t^4}{4 d^2}}$$

$$\frac{d \cdot \frac{g t^2}{2d} + \frac{1}{2} g t_1^2}{d} = \frac{\frac{g t^2}{d}}{1 - \frac{g^2 t^4}{4 d^2}}$$

$$\frac{\frac{1}{2}(t^2 + t_1^2)}{d} = \frac{\frac{t^2}{d}}{\frac{4 d^2 - g^2 t^4}{4 d^2}}$$

$$\frac{1}{2}(t^2 + t_1^2) \cdot (4 d^2 - g^2 t^4) = 4 d^2 t^2 \quad \text{oder umgeformt}$$

$$4 d^2 \left[\frac{t^2 + t_1^2}{2} - t^2\right] = \frac{t^2 + t_1^2}{2} g^2 t^4$$

$$4 d^2 \cdot \frac{t_1^2 - t^2}{2} = \frac{t_1^2 + t^2}{2} g^2 t^4$$

$$d = \frac{1}{2} g t^2 \cdot \sqrt{\frac{t_1^2 + t^2}{t_1^2 - t^2}}$$

§ 8. Bewegung eines ebenen Gebildes in seiner Ebene.

Gelangt eine Gerade $\overline{BC}$ in die Lage $\overline{B'C'}$, so kann man sie in dieselbe durch eine Drehung um den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von $\overline{BB'}$ und $\overline{CC'}$ gebracht denken. Fig. 14. Sind außer der beweglichen Geraden noch bestimmte Bahnlinien der Punkte B und C gegeben, z. B. irgend welche Kurven $\overline{BB'}$ und $\overline{CC'}$ und wählt man auf der Bahnlinie des Punktes B einen sehr nahe bei B gelegenen Punkt B', so findet man den Punkt C' leicht durch Abtragen der Länge $\overline{BC}$, so daß $\overline{B'C'} = \overline{BC}$ ist. Konstruiert man nun in B eine Normale zur Kurve BB', in C eine solche zur Kurve CC', so schneiden sich beide in O. — Bei einer Drehung um O werden nun die von B und C beschriebenen Kreise um so mehr mit den wahren Bahnlinien BB' und CC' zusammenfallen, je kleiner BB' gewählt ist. Denkt man sich BB' unendlich klein und $\overline{BC}$ und $\overline{B'C'}$ als zwei unendlich nahbenachbarte Lagen der beweglichen Geraden, so kann man die unendlich kleine Bewegung der Geraden $\overline{BC}$ als mit einer Drehung um O übereinstimmend ansehen. Dieser Punkt O heißt deshalb **der augenblickliche Drehpunkt** oder **Momentanzentrum**, auch

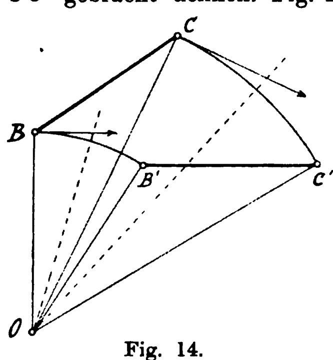


Fig. 14.

Pol für die bewegliche Gerade in der Lage BC. Derselbe ist also bestimmt durch die augenblicklichen Bewegungsrichtungen zweier Punkte der Geraden.

Die Aufsuchung des Poles für die Bewegung einer ebenen Figur gestattet, daß aus den Bewegungsrichtungen zweier Punkte und der Geschwindigkeit von einem derselben auch Bewegungsrichtungen und Geschwindigkeitsgrößen aller andern gefunden werden können. Sind z. B. die Bewegungsrichtungen von B und D, Fig. 15, bekannt, so liegt der Pol in O. — Zunächst findet man die Geschwindigkeitsrichtung von C normal zu $\overline{OC}$. — Die Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte verhalten sich als momentane Umfangsgeschwindigkeiten in Kreisen wie ihre Achsabstände vom Pole. —

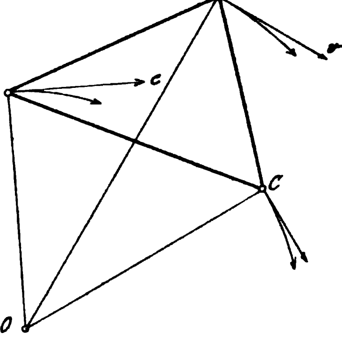


Fig. 15.

Es ist z. B.

$$v : c = \overline{OD} : \overline{OB}.$$

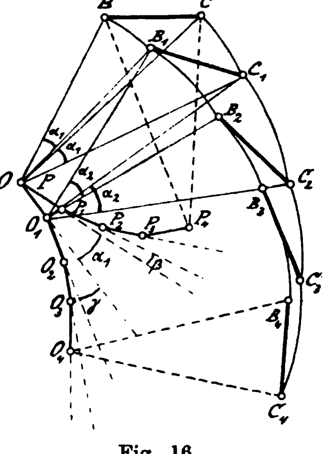
Sind die Richtungen von v und c und die Größe von c gegeben, dann folgt

$$v = c \cdot \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}}.$$

Sind die Bahnen zweier Punkte des ebenen Gebildes einander parallel, so liegt der Pol in unendlicher Ferne und die Bewegung des ebenen Gebildes ist eine fortschreitende. —

Sucht man für einen 2., 3. . . . ., Lagenwechsel der Geraden $\overline{BC}$ die zugehörigen Pole auf, so erhält man als geometrischen Ort derselben ein Polygon, welches in eine Kurve übergeht, falls die benachbarten Lagen der Geraden $\overline{BC}$ unendlich nahe sind. Dieses Polygon heißt **Polvieleck** bzw. **Polbahn,** wenn es eine Kurve ist, Fig. 16.

Die Drehung um den Pol O erfolgt um den Winkel α_1. — Um sie bequemer übersehen zu können, denke man sich eine Gerade $\overline{PP_1} = \overline{OO_1}$ fest mit der Geraden $\overline{BC}$ so verbunden, daß sie mit der letzteren den Winkel α_1 bildet. Dann wird bei der Drehung der Geraden $\overline{BC}$ in die Lage $\overline{B_1C_1}$ die Gerade $\overline{PP_1}$ nach $\overline{OO_1}$ kommen und somit die Bewegung von $\overline{BC}$ gerade ersetzen können.


Fig. 16.

Damit nun nach der Zurücklegung eines weiteren Drehungswinkels α_2 der Punkt P_2 auf O_2 falle, muß

$$\beta + \gamma = \alpha_2, \text{ also}$$

$$\beta = \alpha_2 - \gamma$$

gemacht werden. Hiernach steht der Punkt P_2 fest.

Wenn nun die Punkte P der Reihe nach mit den Punkten O in der beschriebenen Weise zusammenfallen, so führt das Vieleck $PP_1P_2 \ldots .$ offen-

bar eine Rollbewegung auf dem Vieleck OO_1O_2 .... aus. — Die Folge dieser Rollbewegung ist dann, daß die bewegliche Figur $\overline{BC}$ der Reihe nach die vorgeschriebenen Lagen $\overline{B_1C_1}$, $\overline{B_2C_2}$ .... einnimmt.

Rücken die einzelnen Lagen der Geraden $\overline{BC}$ unendlich nahe, so ergibt, wie schon angeführt wurde, der geometrische Ort aller Pole die sogenannte Polbahn. Dabei nähern sich in den beiden Polvielecken die Eckpunkte, bis sie nur mehr unendlich nahe von einander entfernt sind. Das zweite Polvieleck wird auch eine Kurve. — Die gleich langen, unendlich kleinen Seiten beider Polvielecke fallen nach unendlich kleinen Drehungen um ihre Eckpunkte einen Augenblick zusammen, so daß das eine Polvieleck sich auf dem andern abwälzt. Die erste Polbahn heißt **feste Polbahn**, die zweite **bewegliche Polbahn**.

„Die Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene kann also aufgefaßt werden als eine Wälzungsbewegung einer mit ihr verbundenen Polbahn um eine in ihrer Ebene festliegende Polbahn."

Aus Fig. 16 ist ferner zu ersehen, daß das Dreieck BCP_4 mit dem Dreieck $B_4C_4O_4$ sich deckt, wenn der Pol P_4 mit dem Pol O_4 zusammenfällt.

Daher ergibt sich das Gesetz:

„Das Dreieck, dessen Grundlinie die Endlage der bewegten Geraden und dessen Spitze der Endpunkt der festen Polbahn ist, ist kongruent jenem Dreiecke, welches als Grundlinie die Anfangslage der bewegten Geraden und als Spitze den Endpunkt der beweglichen Polbahn hat."

Mit Hilfe dieses Gesetzes können aus den Lagen einer bewegten Geraden die Polbahnen konstruiert werden.

Beispiele.

41. Es ist der augenblickliche Drehpunkt der Schubstange einer Dampfmaschine aufzusuchen und hierauf mit Hilfe derselben die augenblickliche Kolbengeschwindigkeit zu bestimmen. Fig. 17.

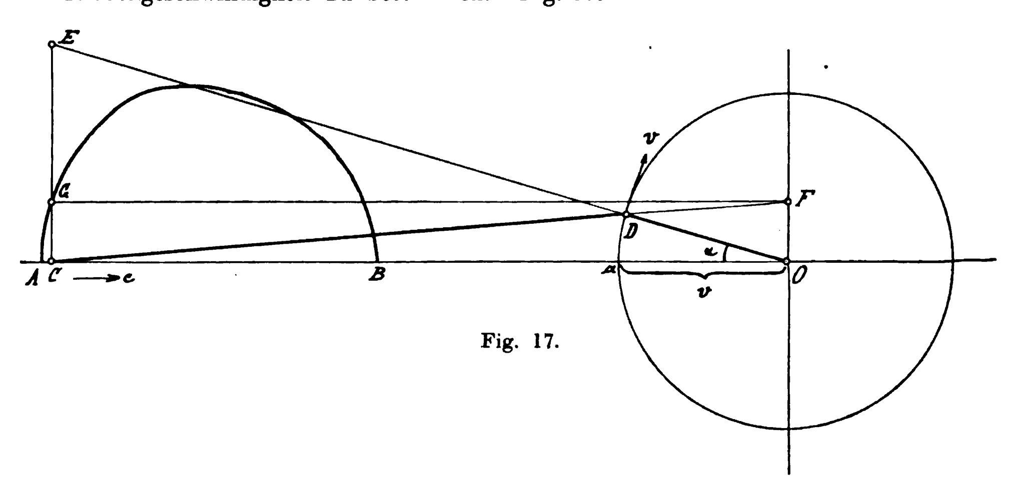


Fig. 17.

Auflösung: Beim Kurbeldrehungswinkel α ist die Lage der Schubstange $\overline{CD}$. — Der Schnittpunkt der Normalen auf die Geschwindigkeitsrichtungen

in C und D ergibt den momentanen Drehpunkt der Schubstange E. — Daher verhält sich

$$c:v=\overline{CE}:\overline{ED}$$

oder wegen $\triangle CED \sim \triangle ODF$

$$c:v=\overline{OF}:\overline{OD}$$

Wird der Kurbelkreishalbmesser $\overline{aO}=v$ gemacht, dann wird

$$c:v=\overline{OF}:v$$

d. h. $\overline{OF}$ ist sofort die Größe der Kolbengeschwindigkeit. Werden alle Kolbengeschwindigkeiten als Ordinaten in den Endpunkten der zugehörigen Kolbenwage aufgetragen, dann erhält man die **Kolbengeschwindigkeitskurve** AGB.

42. Es ist jener Punkt der Stange $\overline{BC}$ anzugeben, welcher bei einer unendlich kleinen Verrückung derselben sich horizontal bewegt. Fig. 18.

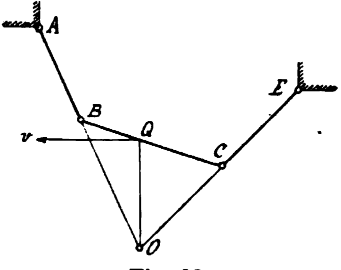


Fig. 18.

Auflösung. Der Pol für die skizzierten Lagen der Geraden $\overline{AB}$ und $\overline{EC}$ ist O. Es wird sich nun jener Punkt Q von $\overline{BC}$ bei einer unendlich kleinen Verrückung dieser Stange horizontal bewegen, dessen Polstrahl vertikal ist. Punkt Q ist demnach bestimmt.

43. Eine Gerade $\overline{BC}$ bewegt sich mit ihren Endpunkten in den Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems, Fig. 19. Welche Kurve beschreibt irgend ein Punkt D der Geraden und was für Kurven sind die feste und die bewegliche Polbahn?

Auflösung. ad a) Der Punkt D der Geraden habe von C den Abstand a und von B den Abstand b — seine Koordinaten seien x und y. Ist in der gezeichneten Lage der Geraden deren Winkel mit der X-Achse α, dann gilt

$$\left.\begin{aligned} x&=a\cos\alpha \\ y&=b\sin\alpha \end{aligned}\right\}\text{ oder}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a}&=\cos\alpha \\ \frac{y}{b}&=\sin\alpha \end{aligned}\right\}\text{ somit}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

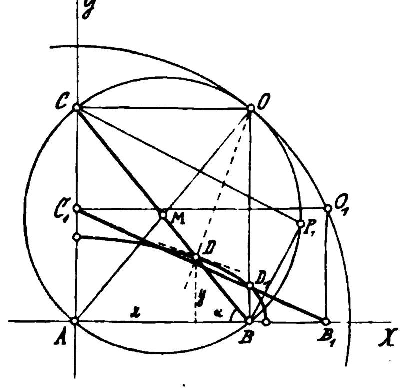


Fig. 19.

d. h. der Punkt beschreibt eine Ellipse, deren Mittelpunkt der Schnittpunkt der X- und Y-Achse ist. Die Halbachsen der Ellipse sind a und b.

ad b) Für die Lage $\overline{BC}$ der Geraden liegt der Pol in O. Da er der 4. Eckpunkt eines Parallelogramms wird, ist sein Abstand vom Achsenschnittpunkt (vom Ursprung des Koordinatensystems) gleich $(a+b)$ — für jede andere Lage der Geraden ist letzterer ebenfalls $(a+b)$, so daß die feste

Polbahn sich als ein Kreis ergibt, dessen Mittelpunkt mit dem Achsenschnittpunkt zusammenfällt und dessen Radius $(a + b)$ ist. Die Verbindungslinie von D mit dem Pole O, der Polstrahl $\overline{DO}$, muß nun senkrecht zur augenblicklichen Bewegungsrichtung von D stehen, woraus folgt, daß die Tangente an die Ellipse in D senkrecht zum Polstrahl $\overline{OD}$ ist. Die Ellipse kann demnach als eine die Senkrechte zu den Polstrahlen tangierende Kurve konstruiert werden.

ad c) Für die Lage $\overline{BC}$ der bewegten Geraden liegt der feste Pol in O, für die Lage $\overline{B_1C_1}$ in O_1. Um nun den zu dem Punkte O_1 der festen Polbahn gehörigen Punkt P_1 der beweglichen zu finden, ist nur zu bedenken, daß P_1 gegen $\overline{BC}$ so liegen muß wie O_1 gegen $\overline{B_1C_1}$. Man hat also nur $\triangle BCP_1 \cong \triangle B_1C_1O_1$ zu machen, so daß P_1 bestimmt ist. Der Ort der Rechtwinkelpunkte aller über der Hypotenuse BC gezeichneten rechtwinkligen Dreiecke ist nun ein Kreis mit dem Durchmesser $BC = (a + b)$. Dieser Kreis muß die bewegliche Polbahn sein. Die gegebene Bewegung also, bei welcher der Stab $\overline{BC}$ mit den Punkten B und C den Achsen $\overline{AX}$ und $\overline{AY}$ folgt, kann auch bewirkt werden durch eine Kolbenbewegung des kleineren Kreises mit dem Durchmesser $\overline{BC}$ auf dem inneren Umfange des größeren Kreises mit dem Halbmesser $\overline{BC}$.

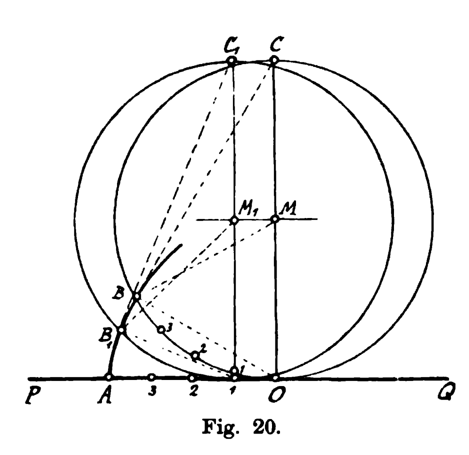


Fig. 20.

44. Welche Bewegung macht der Punkt B des Kreises OBC, Fig. 20, wenn letzterer sich auf der Geraden $\overline{PQ}$, die er in O berührt, abwälzt?

Auflösung. Der Bogen OB werde in eine bestimmte Zahl gleicher Teile, z. B. in 4 gleiche Teile geteilt. Kommt 1 des Kreises mit der Geraden in Berührung, dann ist der sich bewegende Punkt von 1 um $\overline{1B}$ und vom Mittelpunkt des Kreises M_1 um dessen Radius entfernt. So ist die Lage des Punktes B_1 bestimmt. Ebenso findet man leicht alle anderen Lagen von B. Die Kurve, welche B beschreibt, heißt gemeine Zykloide. Der Kreis OBC kann als eine bewegliche, die Gerade $\overline{PQ}$ als eine feste Polbahn aufgefaßt werden. Für die Lage B des bewegten Punktes ist O der Pol, daher $\overline{OB}$ der Drehungshalbmesser, also auch die Normale der Zykloide in B. Folglich muß $\overline{BC}$ die Tangente der Zykloide in B sein. Die analytische Geometrie beweist mit Hilfe der Rechnung, was hier durch die einfache Betrachtung sich so leicht ergeben hat.

Zweiter Abschnitt.

Die Statik.

§ 9. Zusammensetzung zweier Kräfte mit gemeinschaftlichem Angriffspunkt. Das Gesetz vom Kräfteparallelogramm. Zerlegung einer Kraft in zwei Seitenkräfte.

Wirkt eine Kraft auf einen Punkt mit der Masse m, so gilt laut Einleitung $P = m \cdot p$. Da die Beschleunigung durch eine Strecke darstellbar ist, wird auch die ihr proportionale Kraft durch eine Strecke dargestellt werden können, deren Richtung und Länge Richtung und Größe (Intensität) der Kraft angeben.

Ist ein materieller Punkt dem Einflusse der in der Richtung $\overline{OA}$, Fig. 21, wirkenden Kraft unterworfen, so erhält er in derselben die Beschleunigung $p = \frac{P}{m}$, deren Größe also durch den m-ten Teil der Zahl von Einheiten von P dargestellt ist.

$P = m.p$

Fig. 21.

Wirken nun zwei Kräfte P_1 und P_2 gleichzeitig auf einen materiellen Punkt von der Masse m ein, so erzeugen sie unabhängig voneinander die Beschleunigungen p_1 und p_2, die in ihren Richtungen auftreten. Die Beschleunigung p, mit welcher sich der Punkt aber wirklich fortbewegt, ist die Resultierende aus p_1 und p_2, d. h. p ist die Diagonale des Parallelogrammes aus demselben, Fig. 22. Diese Beschleunigung ist nun die Wirkung einer **resultierenden Kraft** oder **Mittelkraft** $P = m \cdot p$, welche in der Richtung von p liegt und somit auch die Diagonale eines Parallelogramms wird, das aus den Kräften P_1 und P_2, den **Seitenkräften** oder **Komponenten** zusammengesetzt ist. Das muß sein, weil die durch P_1 und P_2 erzeugten Bewegungen gleichartige, nämlich gleichförmig beschleunigte, sind, weshalb die resultierende Bewegung eine gradlinige ist.

„Dieses Gesetz wird das **Gesetz vom Kräfteparallelogramm** genannt.“

Fallen die Richtungslinien beider Kräfte zusammen, so ist die Resultierende gleich deren Summe, wenn die ersteren gleich gerichtet und gleich deren Differenz, wenn sie entgegengesetzt gerichtet sind. In letzterem Falle wird die Resultierende Null, wenn die Kräfte gleich groß sind. Man nennt solche Kräfte **entgegengesetzt gleiche Kräfte.**

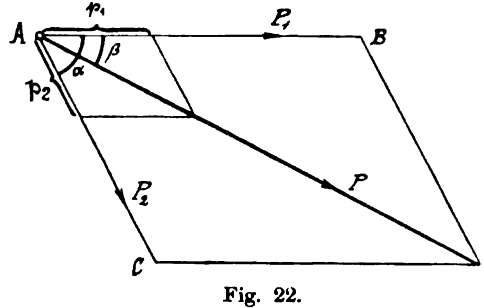


Fig. 22.

Wie nun zwei Kräfte zu einer Resultierenden zusammengesetzt werden können, so kann auch eine Kraft in zwei Seitenkräfte zerlegt werden, wenn α) deren Richtungen bekannt, β) wenn Richtung und Größe der einen Seitenkraft gegeben sind.

Die Größe der Mittelkraft aus zwei Seitenkräften, die miteinander den Winkel α bilden, bestimmt sich rechnerisch laut Carnotschem Satz aus dem $\triangle ABD$, Fig. 22, mit

$$\boldsymbol{P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1 \cdot P_2 \cdot \cos\alpha}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(33)}$$

Heißt der Winkel der Resultierenden P mit der einen Seitenkraft $P_1 \ldots \beta$, so gilt sin $\triangle ABD$ laut Sinussatz

$$P_2 : P = \sin\beta : \sin(180 - \alpha),$$

daher

$$\boldsymbol{\sin\beta = \frac{P_2}{P}\sin\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(34)}$$

so daß auch die Richtung von P rechnerisch festgelegt ist.

Statt des Kräfteparallelogrammes braucht man nur behufs Auffindung der Resultierenden das sogenannte **Kräftedreieck** ABD zu konstruieren, so daß man auch sagen kann:

„Die Resultierende zweier Kräfte mit demselben Angriffspunkt ist die dritte Seite eines Dreieckes, dessen beide anderen die Komponenten sind.“

„Das Aneinanderreihen der Kräfte muß in demselben Pfeilsinn erfolgen. Die Resultierende erhält die entgegengesetzte Pfeilrichtung.“

Beispiele.

45. Zwei horizontale, zueinander senkrechte Kräfte $P_1 = 12$ kg und $P_2 = 16$ kg wirken auf einen Punkt. Wie groß und wie gerichtet ist ihre Resultierende?

Auflösung:

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400}$$

$$\boldsymbol{R = 20 \text{ kg}}$$

Schließt die Resultierende mit P_1 den Winkel β ein, so gilt

$$P_1 = R\cos\beta,$$

woraus

$$\cos\beta = \frac{P_1}{R} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10} = 0{,}6 \text{ ist}$$

$$\boldsymbol{\beta = 53^0\,10'}$$

46. Auf einem Punkt A wirken zwei Kräfte $P_1 = 400$ kg und $P_2 = 600$ kg unter einem Winkel $\alpha = 40^0\,35'$. Wie groß ist die diesen beiden Kräften das Gleichgewicht haltende Kraft und welche Richtung hat sie?

Auflösung:

$$R = \sqrt{400^2 + 600^2 + 2 \cdot 400 \cdot 600 \cdot \cos 40^0\,35'}$$

$$R = \sqrt{160000 + 360000 + 480000 \cdot 0{,}759}$$

$$R = \sqrt{160000 + 360000 + 364\,000} = \sqrt{884\,000}$$

$$\boldsymbol{R \sim 940\ \mathrm{kg}}$$

$$\sin\beta = \frac{P_2}{R}\sin\alpha$$

$$= \frac{600}{940} \cdot 0{,}65 \sim 0{,}415$$

$$\beta = \mathbf{24^0\,30'}$$

47. Ein G kg schwerer Körper liegt auf einer schiefen Ebene, welche mit dem Horizonte den Winkel α bildet. Wie groß ist der Normaldruck auf die schiefe Ebene und wie groß ist die Kraft, welche den Körper von ihr herunterbewegt?

Auflösung: Entwirft man eine Figur, so wird ersichtlich, daß das Gewicht des Körpers und der Normaldruck N auf die schiefe Ebene den Winkel α bilden. Daher wird

$$\boldsymbol{N = G \cos\alpha}$$

Ebenso findet man leicht die bewegende Komponente mit

$$\boldsymbol{P = G \cdot \sin\alpha}$$

48. Welchen Normaldruck N erleidet eine wagerechte Ebene durch einen 500 kg schweren Körper, wenn an letzterem eine Kraft von 320 kg unter einem Winkel von $\alpha = 60^0$ gegen den Horizont aufwärts wirkt?

Auflösung: Die Vertikalkomponente V von 320 kg ist

$$V = 320 \cdot \sin 60^0 = 320 \cdot 0{,}87$$

$$V \sim 278\ \mathrm{kg}$$

Daher ergibt sich der Normaldruck auf die Unterlage

$$N = 500 - 278$$

$$\boldsymbol{N = 222\ \mathrm{kg}}$$

49. Eine Dampfmaschine hat den Zylinderdurchmesser $D = 350$ mm und arbeitet mit einem größten Dampfüberdrucke von 6 Atm. — Wie groß sind die Drücke in der Schubstange und auf den Kreuzkopf in dem Momente, in welchem erstere senkrecht zur Kurbel steht?

Auflösung: Der Druck auf den Kolben ist $\frac{D^2 \cdot \pi}{4} \cdot 6 = 5750$ kg. Heißt der Winkel, welchen Kolbenstange und Schubstange einschließen, α, so ist

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{5} \sim 0{,}2, \text{ somit } \alpha = 11^0\,18'$$

Der Druck in der Schubstange wird

$$S = \frac{5750}{\cos\alpha} = \frac{5750}{0{,}98}$$

$$\boldsymbol{S = 5880\ \mathrm{kg}}$$

Der Druck auf den Kreuzkopf ergibt sich mit $K = 5750 \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$

$$\boldsymbol{K = 1150\ \mathrm{kg}}$$

50. Eine Kugel liegt auf zwei schiefen Ebenen, welche mit dem Horizonte die Winkel α_1 und α_2 bilden und welche sich in einer Horizontalen schneiden. Welche Drücke empfangen die schiefen Ebenen? Fig. 23.



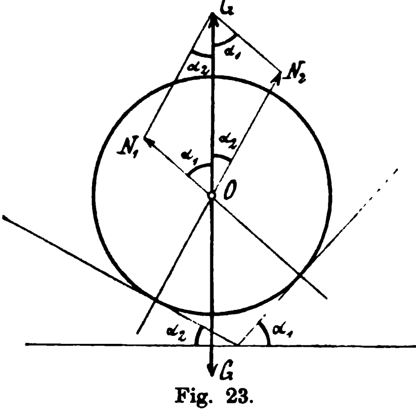


Fig. 23.

Auflösung: Gleichgewicht ist vorhanden, wenn die Resultierende aus den Gegendrücken der schiefen Ebenen entgegengesetzt gleich G ist. Es wird

$$N_1 : G = \sin \alpha_2 : \sin (\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$N_1 = G \cdot \frac{\sin \alpha_2}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)}$$

$$N_2 : G = \sin \alpha_1 : \sin (\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$N_2 = G \cdot \frac{\sin \alpha_1}{(\sin \alpha_1 + \alpha_2)}.$$

51. Zwei Kugeln mit den Gewichten G und G' stützen sich gegen zwei mit der Horizontalebene die Winkel α und α' bildende Ebenen. Welchen Winkel schließt die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte mit der Horizontalen ein, wenn sie im Gleichgewichte sind? Fig. 24.

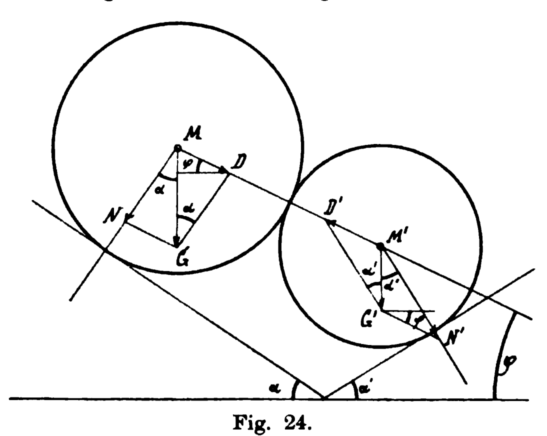


Fig. 24.

Auflösung: Soll Gleichgewicht bestehen, so müssen die Komponenten D und D' gleich sein.

Aus $\triangle\, GMD \ldots D : G = \sin \alpha : \sin\, [90 - (\alpha - \varphi)]$

$$D = G \frac{\sin \alpha}{\cos (\alpha - \varphi)}.$$

Aus $\triangle\, G'M'N' \ldots\ldots D' : G' = \sin \alpha' : \sin [180 - \alpha' - (90 + \varphi)]$

$$D' = G' \frac{\sin \alpha'}{\cos (\alpha' + \varphi)}.$$

Daher $$G \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos (\alpha - \varphi)} = G' \frac{\sin \alpha'}{\cos (\alpha' + \varphi)}$$ oder

$$G \sin\alpha \cos\alpha' \cos\varphi - G \sin\alpha \sin\alpha' \sin\varphi = G' \sin\alpha' \cos\alpha \cos\varphi + G' \sin\alpha \sin\alpha' \sin\varphi$$

$$G \sin\alpha \cos\alpha' - G \cdot \operatorname{tg}\varphi \sin\alpha \sin\alpha' = G \sin\alpha' \cdot \cos\alpha + G' \cdot \operatorname{tg}\varphi \sin\alpha \cdot \sin\alpha'$$

$$\operatorname{tg}\varphi \cdot [G' \sin\alpha \cdot \sin\alpha' + G \sin\alpha \sin\alpha'] = G \sin\alpha \cos\alpha' - G' \sin\alpha' \cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{G \sin\alpha \cos\alpha' - G' \sin\alpha' \cos\alpha}{\sin\alpha \sin\alpha' \cdot (G + G')}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{G \cot\alpha' - G' \cot\alpha}{G + G'}$$

52. Auf zwei gleich schwere Scheiben mit dem Gewichte G kg, welche an gleich langen Faden hängen und sich gegen eine Vertikalwand stützen, wird eine dritte ebensolche Scheibe gelegt. Wann herrscht Gleichgewicht? Fig. 25.

Auflösung. Gleichgewicht ist vorhanden, wenn die Komponenten N_1 der ersten beiden Kräfte G gleich sind mit den Komponenten N_2 des dritten Gewichtes.

Die Gleichgewichtsbedingung wird eine Beziehung der Winkel α und β enthalten.

Laut Figur ist

$$\gamma = 180 - (180 - \beta) - \alpha = \beta - \alpha.$$

Im schraffierten Dreiecke gilt

$$N_1 : G = \sin\alpha : \sin(\beta - \alpha)$$

$$N_1 = G \frac{\sin\alpha}{\sin(\beta - \alpha)}$$

Fig. 25.

ferner wird $N_2 \cos\beta = \frac{G}{2}$, daher

$$N_2 = \frac{G}{2\cos\beta}.$$

Demnach
$$G \frac{\sin\alpha}{\sin(\beta - \alpha)} = \frac{G}{2\cos\beta}$$

$$2 \sin\alpha \cos\beta = \sin\beta \cos\alpha - \sin\alpha \cos\beta$$

$$\sin\beta \cos\alpha = 3 \sin\alpha \cos\beta.$$

Werden beide Seiten der Gleichung durch $\cos\alpha \cos\beta$ dividiert, dann ergibt sich
$$\operatorname{tg}\beta = 3 \operatorname{tg}\alpha$$

§ 10. Zusammensetzung mehrerer Kräfte mit demselben Angriffspunkt. Das Kräftepolygon.

Sollen mehrere Kräfte mit demselben Angriffspunkt zusammengesetzt werden, so bildet man zunächst die Resultierende aus zwei beliebigen dieser Kräfte, setzt letztere mit der dritten Kraft wieder zu einer Resultierenden zusammen usw. Dies ist in Fig. 26 durchgeführt.

Zu demselben Ziele gelangt man auch wieder durch Anwendung der Kräftedreiecke 0, 1, 2, 0, 2, 3, 0, 3, 4 . . . . Dabei ist es nicht einmal nötig, die einzelnen Teilresultierenden verzeichnen zu müssen.

Die Gesamtresultierende ergibt sich als Schlußlinie eines Polygons 0, 1, 2, 3, 4, 0, welches durch Aneinanderreihen der Seitenkräfte nach Größe und Richtung

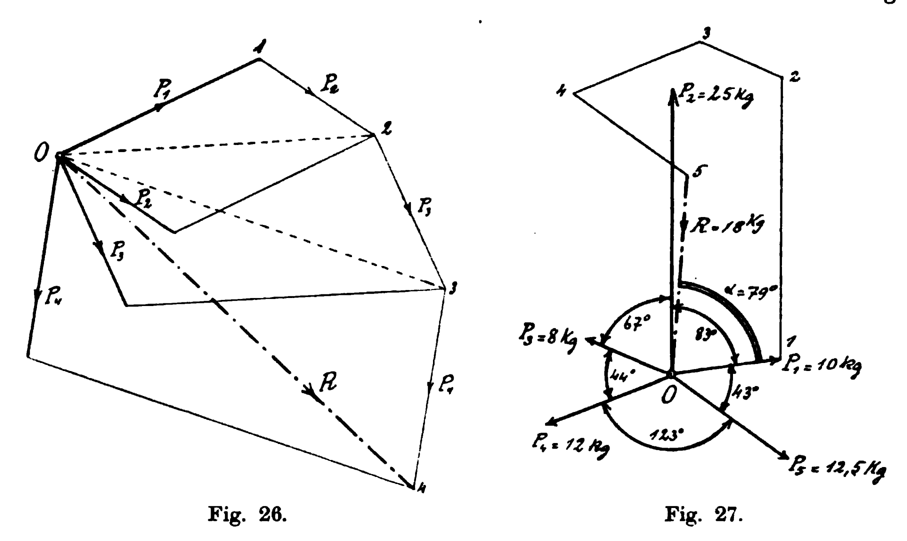


Fig. 26. Fig. 27.

gebildet wird. Man nennt dieses Polygon das **Kräftepolygon.** Die Folge, in welcher die Seitenkräfte aneinander gereiht werden, ist gleichgiltig. Der Pfeilsinn der Resultierenden ist demjenigen der Komponenten entgegengesetzt.

Folgerung. Ist das Kräftepolygon geschlossen, so ist die Resultierende Null. Die vorhandenen Kräfte halten sich das Gleichgewicht.

Beispiele.

53. In einem Punkte greifen 5 Kräfte $P_1 = 10$ kg, $P_2 = 25$ kg, $P_3 = 8$ kg, $P_4 = 12$ kg und $P_5 = 12{,}5$ kg an, Fig. 27. — Wie groß ist die Resultierende der Kräfte und welche Richtung hat sie?

Auflösung. Die Kräfte werden nach Größe und Richtung aneinandergereiht. Die Resultierende ist **18 kg** und schließt mit P_1 den Winkel $\alpha = \mathbf{79^0}$ ein.

54. Zwei Kräfte $P_1 = 15$ kg und $P_2 = 10$ kg schließen einen Winkel $\alpha = 60^0$ ein. — Wie ist in ihrem Angriffspunkte eine dritte Kraft P_3 anzubringen, damit derselbe im Gleichgewichte sei und welche Größe hat P_3? Die Aufgabe ist rechnerisch zu lösen.

Auflösung: Die Resultierende von P_1 und P_2 ist

$$R = \sqrt{15^2 + 10^2 + 2 \cdot 15 \cdot 10 \cdot \cos 60} + \sqrt{225 + 100 + 300 \cdot 0{,}5}$$

$$\boldsymbol{R \sim 21{,}8 \text{ kg}}$$

Die Größe von P_3 ergibt sich mit $P_3 = R = 21{,}8$ kg. — P_3 ist R entgegengerichtet. Heißt der Winkel, den R mit P_1 einschließt, β, dann wird

$$\sin \beta = \frac{P_2}{R} \sin \alpha = \frac{10 \cdot 0{,}87}{21{,}8} = 0{,}4$$

$$\beta = 23^0\,30'$$

Da P_3 mit R einen Winkel von 180^0 und R mit P_2 einen Winkel von $36^0\,30'$ bildet, ist $\sphericalangle (P_3, P_2) = 180^0 - 23^0\,30'$, d. h.

$$\boldsymbol{\sphericalangle (P_3, P_2) = 156^0\,30'}$$

---

§ 11. Zusammensetzung mehrerer Kräfte mit gemeinschaftlichem Angriffspunkte nach vorhergegangener Zerlegung derselben in Horizontal- und Vertikalkomponenten.

Die in vorigem Paragraphen gezeigte rechnerische Ermittlung der Größe der Gesamtresultierenden mehrerer in demselben Punkte angreifenden Kräfte würde wegen der oftmals nacheinander notwendigen Anwendung des Carnot-

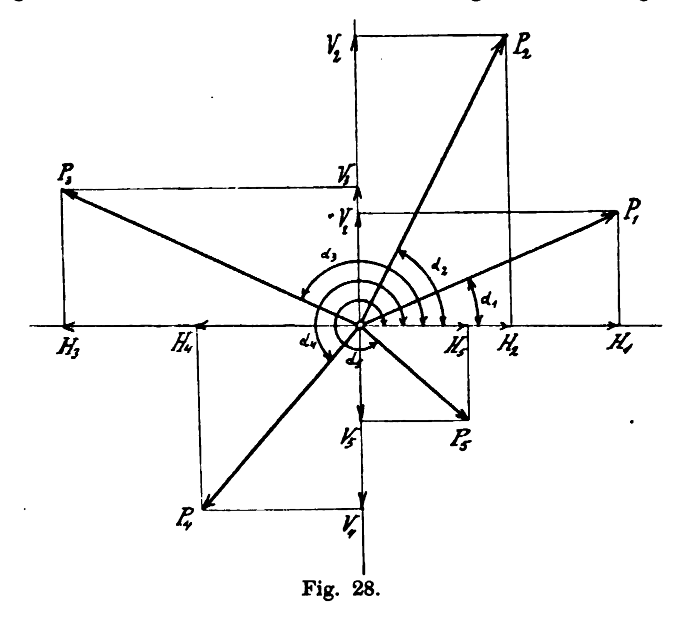


Fig. 28.

schen Satzes umständlich sein. Die graphische Auffindung der Resultierenden andrerseits ist ungenau.

Es empfiehlt sich daher zur Auffindung der Resultierenden folgender einfacher Weg (Aufsuchung der Resultierenden nach vorhergegangener Zerlegung der Kräfte in Horizontal- und Vertikalkomponenten).

Man zerlegt alle Kräfte, siehe Fig. 28, in zwei aufeinander senkrecht

stehenden Richtungen in Komponenten H_1, H_2 . . . . . und V_1, V_2 . . . . .
Dadurch ergibt sich in der einen, z. B. horizontalen Richtung die Teilresultierende

$$H_1 + H_2 + \ldots\ldots = \Sigma(H)$$

und in der anderen, z. B. vertikalen, die Teilresultierende

$$V_1 + V_2 + \ldots\ldots = \Sigma(V)$$

Hierbei sind $H_1 = P_1 \cos\alpha_1$, $H_2 = P_2 \cos\alpha_2$ . . . . und
$V_1 = P_1 \sin\alpha_1$, $V_2 = P_2 \sin\alpha_2$ . . . .

Aus $\Sigma(H)$ und $\Sigma(V)$ findet sich einfach die Gesamtresultierende mit

$$R = \sqrt{[\Sigma(H)]^2 + [\Sigma(V)]^2} \quad \ldots\ldots \quad (35)$$

Werden die Winkel, welche R mit $\Sigma(H)$, bzw. mit $\Sigma(V)$, bildet, α und β genannt, so folgen:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\Sigma(H)}{R} \\ \cos\beta &= \frac{\Sigma(V)}{R} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (36)$$

Sollen sich aber die Kräfte das Gleichgewicht halten, so müssen die beiden Beziehungen gelten:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma(H) &= 0 \\ \Sigma(V) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (37)$$

Beispiele.

55. Die Aufgabe 50 mittels der in diesem Paragraphen angegebenen Methode zu lösen.

Auflösung: Vorhanden sind in horizontaler Richtung die Kräfte $N_1 \sin\alpha_1$ und $N_2 \sin\alpha_2$, in vertikaler Richtung die Kräfte G, $N_1 \cos\alpha_1$ und $N_2 \cos\alpha_2$. — Es muß nun sein

$$N_1 \sin\alpha_1 = N_2 \sin\alpha_2 \text{ und}$$

$$G = N_1 \cos\alpha_1 + N_2 \cos\alpha_2$$

$$N_1 = N_2 \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}$$

$$G = N_2 \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} \cos\alpha_1 + N_2 \cos\alpha_2$$

$$G = N_2 \frac{\sin\alpha_2 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1 \cos\alpha_2}{\sin\alpha_1}, \text{ daher}$$

$$N_2 = G \frac{\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

$$N_1 = G \frac{\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

56. Die Aufgabe 53 ist ebenfalls mittels der an diesem Paragraphen angegebenen Methode zu lösen.

Auflösung: Werden durch den Angriffspunkt der Kräfte zwei aufeinander senkrechte Achsen gelegt, von denen die eine mit P_1 zusammenfallen möge, dann sind vorhanden

a) In horizontaler Richtung die Kräftekomponenten

$$P_1,\; P_2 \cos 83^0,\; P_3 \cos 150^0,\; P_4 \cos 194^0,\; P_5 \cos 317^0$$

Dann wird $\Sigma(H) = P_1 + P_2 \cos 83^0 - P_3 \cos 30^0 - P_4 \cos 14^0 + P_5 \cos 43^0$

$$= 10 + 25 \cdot 0{,}122 - 8 \cdot 0{,}866 - 12 \cdot 0{,}97 + 12{,}5 \cdot 0{,}73$$

$$= 10 + 3{,}05 - 6{,}928 - 11{,}64 + 9{,}125$$

$$\Sigma(H) = 3{,}6 \text{ kg}$$

b) In vertikaler Richtung ist ebenso

$$\Sigma(V) = P_1 \sin 0^0 + P_2 \sin 83^0 + P_3 \sin 150^0 + P_4 \sin 194^0 + P_5 \sin 317^0$$

$$= 0 + 25 \cdot \sin 83^0 + 8 \cdot \sin 30^0 - 12 \sin 14^0 - 12{,}5 \cdot \sin 43^0$$

$$= 0 + 25 \cdot 0{,}993 + 8 \cdot 0{,}5 - 12 \cdot 0{,}242 - 12{,}5 \cdot 0{,}682$$

$$\Sigma(V) = 17{,}35 \text{ kg}$$

$$R = \sqrt{[\Sigma(H)]^2 + [\Sigma(V)]^2} = \sqrt{13 + 302} = \sqrt{315}$$

$$\boldsymbol{R \sim 18 \text{ kg}}$$

Da $\Sigma(H)$ und $\Sigma(V)$ positiv sind, liegt der Winkel (R, P_1) im ersten Quadranten.

$$\cos \alpha = \frac{\Sigma(H)}{R} = \frac{3{,}6}{18} = \frac{0{,}6}{3} \sim 0{,}2$$

$$\boldsymbol{\alpha \sim 79^0}$$

57. Auf einen Punkt wirken die fünf Kräfte $P_1 = 5$ kg, $P_2 = 15$ kg, $P_3 = 12$ kg, $P_4 = 17$ kg und $P_5 = 10$ kg. — Die Kräfte schließen je miteinander den Winkel 60^0 ein. Man ermittle nach der in diesem Paragraphen angegebenen Methode Größe und Richtung der Resultierenden.

Auflösung: Es ist

$$\Sigma(H) = 5 + 15 \cdot \cos 60^0 + 12 \cdot \cos 120^0 + 17 \cdot \cos 180^0 + 10 \cdot \cos 240^0$$

$$= 5 + 15 \cdot 0{,}5 - 12 \cdot \cos 60^0 + 17 \cdot (-1) - 10 \cdot \cos 60^0$$

$$= 5 + 7{,}5 - 22 \cdot 0{,}5 - 17 = 12{,}5 - 28$$

$$\Sigma(H) = -15{,}5 \text{ kg}$$

Ebenso wird

$$\Sigma(V) = 5 \cdot \sin 0^0 + 15 \cdot \sin 60^0 + 12 \cdot \sin 120^0 + 17 \cdot \sin 180^0 + 10 \cdot \sin 240^0$$

$$= 0 + 15 \cdot \sin 60^0 + 12 \sin 60^0 + 17 \cdot 0 - 10 \cdot \sin 60^0$$

$$= 17 \cdot \sin 60^0 = 17 \cdot 0{,}866$$

$$\Sigma(V) = +14{,}7 \text{ kg}$$

Resultierende und ihr Winkel mit P_1 liegen im zweiten Quadranten.

$$R = \sqrt{(-15{,}5)^2 + 14{,}7^2} = \sqrt{240 + 216} = \sqrt{456}$$

$$\boldsymbol{R \sim 21{,}6 \text{ kg}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\Sigma(H)}{R} = \frac{-15{,}5}{21{,}6} = -0{,}717$$

$$\alpha = 180^0 - 44^0\,10'$$

$$\boldsymbol{\alpha \sim 135^0\,50'}$$

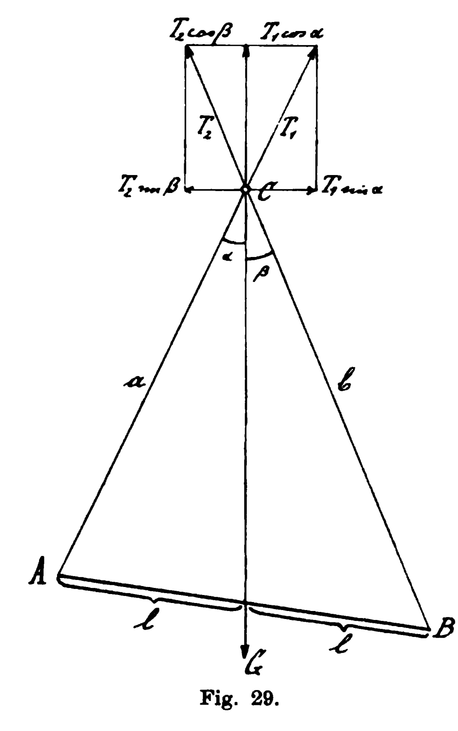


Fig. 29.

58. Ein Stab ist an seinen Enden durch zwei verschieden lange Fäden, die von einem festen Punkte ausgehen und a und b lang sind, aufgehängt. Welche Spannungen sind in den Fäden vorhanden, wenn der Stab die Länge $2l$ und das Gewicht G hat? Fig. 29.

Auflösung:

$$\Sigma(H) = 0 \ldots T_1 \sin\alpha = T_2 \sin\beta$$
$$\Sigma(V) = 0 \ldots G = T_1 \cos\alpha + T_2 \cos\beta.$$

Da G durch den Schnitt von a und b hindurchgehen muß, damit zwischen T_1, T_2 und G Gleichgewicht bestehe, muß sein

$$a \cdot \sin\alpha = b \cdot \sin\beta, \text{ d. h.}$$
$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{T_1}{T_2}$$
$$T_2 = T_1 \cdot \frac{b}{a}$$

Somit $G = T_1 \cos\alpha + T_1 \cdot \frac{b}{a} \cos\beta$

$$= T_1 \cdot \frac{a\cos\alpha + b\cos\beta}{a}$$

Aus ΔABC ergibt sich .... $a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha+\beta) = 4l^2$

Hierzu .... $T_1^2 (a\cos\alpha + b\cos\beta)^2 = a^2G^2$

Durch Ausführung der letzteren Gleichungen resultieren

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha\cos\beta + 2ab\sin\alpha\sin\beta = 4l^2 \quad \ldots\ldots (\alpha)$$

$$a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + 2ab\cos\alpha\cos\beta = \frac{a^2G^2}{T_1^2} \text{ oder}$$

$$a^2 - a^2\sin^2\alpha + b^2 - b^2\sin^2\beta + 2ab\cos\alpha\cos\beta = \frac{a^2G^2}{T_1^2} \quad \ldots (\beta)$$

Werden Gleichungen (α) und (β) addiert, so wird

$$\frac{a^2G^2}{T_1^2} + 4l^2 = 2a^2 + 2b^2 - (a^2\sin^2\alpha + b^2\sin^2\beta - 2ab\sin\alpha\sin\beta)$$
$$= 2a^2 + 2b^2 - \underbrace{(a\sin\alpha - b\sin\beta)^2}_{\text{Null}}$$

$$a^2G^2 + 4l^2T_1^2 = T_1^2 \cdot (2a^2 + 2b^2), \text{ demnach}$$

$$T_1 = \frac{G \cdot a}{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - 4l^2}} \text{ und } T_2 = T_1 \cdot \frac{b}{a} = \frac{G \cdot b}{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - 4l^2}}$$

§ 12. Drehmoment einer Kraft in bezug auf einen Punkt. Zusammensetzung von Drehmomenten.

„Unter Drehmoment einer Kraft in bezug auf einen Punkt, **Drehpunkt** oder **Momentenpunkt**, versteht man das Drehungsbestreben dieser Kraft."

Ist der genannte Punkt der Drehpunkt eines Körpers, so verursacht die Kraft um diesen eine um so intensivere Drehung, je größer sie ist und je größer der Abstand des Drehpunktes von der Richtung der Kraft, der **Hebelarm**, ist.

Kraft und Hebelarm sind also Faktoren des Drehmomentes.

„Die Größe des Drehmomentes ist das Produkt aus der Kraft und ihres Hebelarmes" —

$$M = P \cdot p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

Da die Bezeichnung der Kraft kg und diejenige des Hebelarmes Meter (cm, mm) ist, wird die Bezeichnung des Drehmomentes Kilogrammeter, abgekürzt kgm (kgcm, kgmm).

Das Vorzeichen des Drehmomentes wird positiv genommen, wenn die Drehrichtung im Uhrzeigersinne vorhanden ist, negativ im Gegenfalle. Entgegengesetzt gleiche Drehmomente heben sich auf.

Das Drehmoment einer Kraft in bezug auf einen in ihr liegenden Punkt ist Null (Hebelarm ist 0, daher auch das Drehmoment).

„Das Drehmoment der Resultierenden zweier Kräfte, welche gemeinschaftlichen Angriffspunkt haben, ist gleich der algebraischen Summe der Drehmomente dieser beiden Kräfte."

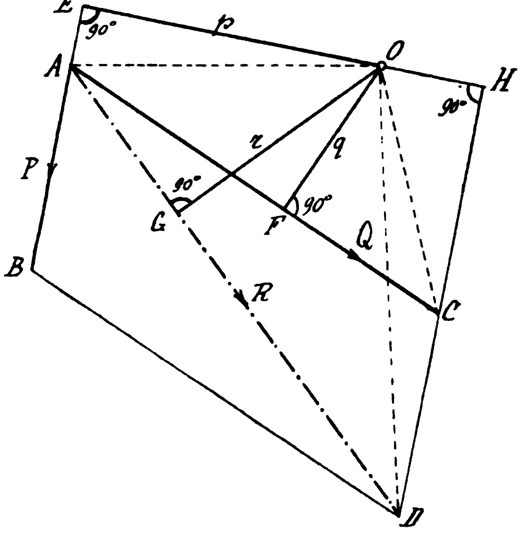


Fig. 30.

a) Beweis, wenn der Momentenpunkt außerhalb der Komponenten P und Q liegt; Fig. 30.

Der Momentenpunkt O habe von den Kräften P, Q und R die Abstände p, q, r.

Nun $\triangle OAD = \triangle AOC + \triangle ACD - \triangle DOC$

$$\frac{R \cdot r}{2} = \frac{Qq}{2} + \frac{\overline{CD} \cdot \overline{HE}}{2} - \frac{\overline{DC} \cdot \overline{OH}}{2}$$

$$R \cdot r = Qq + \overline{CD}(\overline{HE} - \overline{OH}), \text{ d. h.}$$

$$R \cdot r = Qq + P \cdot EO \text{ oder}$$

$$R \cdot r = P \cdot q + Q \cdot q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

b) Beweis, wenn der Momentenpunkt innerhalb der Komponenten liegt; Fig. 31.

$$\triangle AOD = \triangle OCD + \triangle ACD - \triangle ACO$$

$$\frac{\overline{AD}\cdot\overline{OG}}{2} = \frac{\overline{CD}\cdot\overline{OH}}{2} + \frac{\overline{DC}\cdot\overline{AJ}}{2} - \frac{\overline{AC}\cdot\overline{OK}}{2}$$

$$\overline{AD}\cdot\overline{OG} = \overline{CD}(\overline{OH} + \overline{AJ}) - \overline{AC}\cdot\overline{OK}.$$

Nun ist $\overline{AJ} = \overline{HL}$, also

$$\overline{AD}\cdot\overline{OG} = \overline{CD}(\overline{OH} + \overline{HL}) - \overline{AC}\cdot\overline{OK}, \text{ d. h.}$$

$$\boldsymbol{Rr = P\cdot p - Qq} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(39a)}$$

c) Liegt der Momentenpunkt in der Resultierenden, dann ist deren Drehmoment Null; die Komponenten haben entgegengesetzt gleiche Drehmomente.

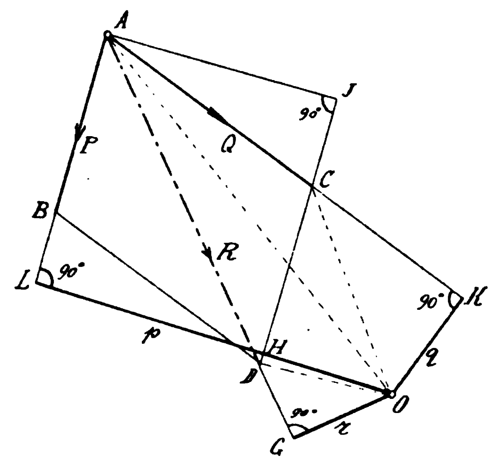


Fig. 31.

Der oben bewiesene Momentensatz gilt auch für beliebig viele Kräfte mit demselben Angriffspunkt.

Die Kräfte seien $P_1, P_2, \ldots\ldots P_n$, ihre Hebelarme $p_1, p_2 \ldots . p_n$; setzt man P_1 und P_2 zu R_1, welche Kraft den Hebelarm r_1 hat, zusammen, dann R_1 mit P_3 zu R_2, welche Kraft den Hebelarm r_2 hat usw., so folgt

$$R_1 r_1 = P_1 p_1 + P_2 p_2$$
$$R_1 r_2 = R_1 r_1 + P_3 p_3$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$R_{n-1} r_{n-1} = R_{n-2} r_{n-2} + P_n p_{n-1}$$
$$R\cdot r = R_{n-1} r_{n-1} + P_n p_n$$

Durch Addition auf beiden Seiten ergibt sich

$$R_1 r_1 + R_2 r_2 + \ldots + R_{n-1} r_{n-1} + Rr = R_1 r_1 + R_2 r_2 \ldots + R_{n-1} r_{n-1} + P_1 p_1 + \ldots + P_n p_n$$

$$R\cdot r = P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots P_n p_n, \text{ d. h.}$$

$$\boldsymbol{R\cdot r = \Sigma(P\cdot p)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(40)}$$

Beispiele.

59. Wie groß muß laut Fig. 32 die Kraft S sein, damit der Kolben auf seiner rechten Seite Wasser unter einem Drucke von p kg/qcm fortschaffe?

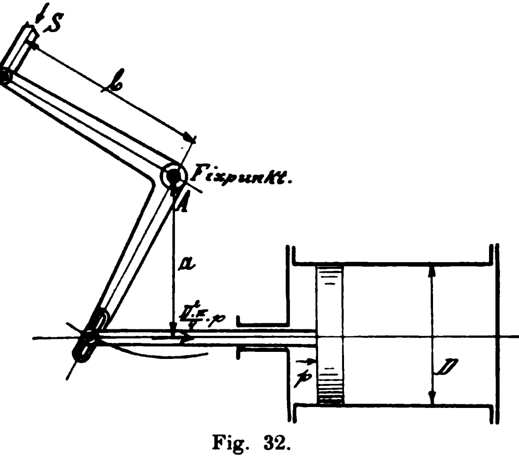


Fig. 32.

Auflösung: Der Totaldruck des Kolbens muß

$$\frac{D^2 \pi}{4} \cdot p \text{ kg}$$

sein. Dann gilt in bezug auf den Drehpunkt A

$$\frac{D^2 \cdot \pi}{4} \cdot p \cdot a = S \cdot b, \text{ somit}$$

$$S = \frac{D^2 \cdot \pi}{4} p \cdot \frac{a}{b}$$

60. Den Zug Z in der Schraube des in Fig. 33 skizzierten Hängelagers zu bestimmen.

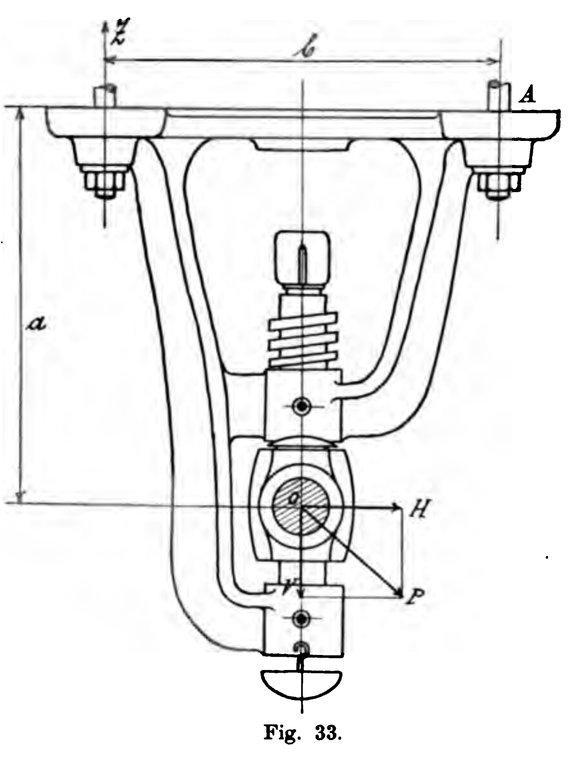


Fig. 33.

Auflösung:

Horizontal- und Vertikalkomponente von P werden gesucht.

H und V versuchen das Lager um A zu drehen. Demnach schreibt sich die Momentgleichung in bezug auf A

$$Z \cdot b = H \cdot a + V \cdot \frac{b}{2}$$

woraus

$$Z = H \cdot \frac{a}{b} + \frac{V}{2}$$

folgt.

§ 13. Zusammensetzung zweier beliebig gerichteter Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten.

In Fig. 34 greifen in den Punkten A und B eines starren Körpers die Kräfte P und Q an. An der Betrachtung wird nichts geändert, wenn man den Angriffspunkt der beiden Kräfte in den Schnittpunkt ihrer Richtungen verlegt.

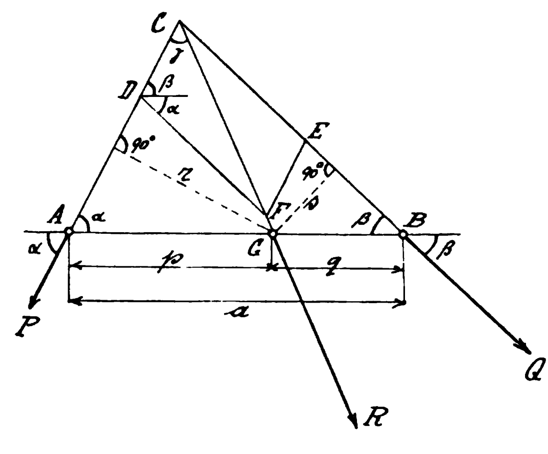


Fig. 34.

Daß sich der Angriffspunkt einer Kraft in irgend einen Punkt ihrer Richtung verlegen läßt, wird einfach und folgendermaßen bewiesen.

Eine Kraft greife im Punkte A eines Körpers an; Fig. 35. — Werden nun im Punkte B, welcher in der Richtung der Kraft K liegt, zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte K hinzugefügt, so ist der Gleichgewichtszustand des Körpers nicht geändert worden. Es heben sich die in A angreifende und die von B aus nach links wirkende Kraft auf, so daß in B nur die rechtswirkende übrigbleibt, welche als von A nach B verlegt seiende aufgefaßt werden kann.

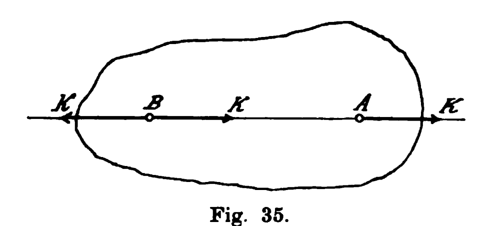


Fig. 35.

Demnach kann in Fig. 34 der Punkt C als gemeinschaftlicher Angriffspunkt der Kräfte P und Q angesehen werden, so daß die Aufgabe auf eine frühere zurückgeführt ist.

Die Größe der Resultierenden ergibt sich aus

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2P \cdot Q \cos(\alpha + \beta)} \quad \ldots \ldots (41)$$

Der Angriffspunkt der Resultierenden kann nun nach G verlegt werden. Die Lage von G ergibt sich aus dem Momentensatz, nach welchem die Summe der Momente der Komponenten gleich sein muß dem Momente der Resultierenden. Es wird somit

$$P \cdot r - Q \cdot s = R \cdot 0, \text{ daraus}$$
$$P \cdot r = Q \cdot s, \text{ d. h.}$$
$$P : Q = s : r.$$

Da laut Figur $r = p \sin\alpha$ und $s = q \sin\beta$ sind, läßt sich auch schreiben

$$P : Q = q \sin\beta : p \sin\alpha \quad \text{oder}$$
$$\frac{P}{\sin\beta} : \frac{Q}{\sin\alpha} = q : p, \quad \text{so daß}$$
$$P \sin\alpha : Q \sin\beta = q : p \quad \text{wird.}$$

Um p und q rechnen zu können, ist nur zu bedenken, daß $p + q = a$ ist. Daher bestimmt sich nach einer kleinen Umformung aus

$$(p + q) : p = (P \sin \alpha + Q \sin \beta) : Q \sin \beta$$

der Arm p

$$p = \frac{a \cdot Q \sin \beta}{P \sin \alpha + Q \sin \beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (42a)$$

Ebenso ergibt sich aus

$$(p + q) : q = (P \sin \alpha + Q \sin \beta) : P \sin \alpha$$

der Arm q

$$q = \frac{a \cdot P \sin \alpha}{P \cdot \sin \alpha + Q \sin \beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (42b)$$

Beispiele.

61. Zwei Kräfte $P = 15$ kg und $Q = 27$ kg schließen mit den Verlängerungen der Geraden $\overline{AB}$ die Winkel $\alpha = 42^0$ und $\beta = 48^0$ ein. Man bestimme die Größe der Resultierenden.

Auflösung:
$$R = \sqrt{15^2 + 27^2 - 2 \cdot 15 \cdot 27 \cdot \cos 90^0}$$
$$R = \sqrt{225 + 729} = \sqrt{954}$$
$$\boldsymbol{R \sim 30{,}8 \text{ kg}}$$

62. Zwei Kräfte $P = 8$ kg und $Q = 12{,}5$ kg greifen an den Endpunkten einer festen, einen Meter langen Stange an und bilden mit den Verlängerungen derselben die Winkel $\alpha = 72^0$ und $\beta = 40^0$. — Man bestimme die Resultierende R, ferner den Winkel γ zwischen P und R und endlich den Abstand der Angriffspunkte von P und R. — (Bezeichnungen nach Fig. 34.)

Auflösung:
$$R = \sqrt{8^2 + 12{,}5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 12{,}5 \cdot \cos 120^0}$$
$$R = \sqrt{64 + 156 + 200 \cdot \cos 60^0}$$
$$R = \sqrt{220 + 100} = \sqrt{320}$$
$$\boldsymbol{R \sim 17{,}9 \text{ kg}}$$

Um den Winkel γ zu finden, wird bestens der Sinussatz angewendet.

$$R : Q = \sin(\alpha + \beta) : \sin \gamma$$
$$\sin \gamma = \frac{12{,}5 \cdot \sin 120^0}{17{,}9} = \frac{12{,}5 \cdot 0{,}87}{17{,}9} = 0{,}605$$
$$\gamma = \mathbf{37^0}$$
$$p = \frac{a Q \sin \beta}{P \sin \alpha + Q \sin \beta}$$
$$p = \frac{1 \cdot 12{,}5 \cdot \sin 48^0}{8 \cdot \sin 72^0 + 12{,}5 \cdot \sin 48^0} = \frac{12{,}5 \cdot 0{,}745}{8 \cdot 0{,}95 + 12{,}5 \cdot 0{,}745}$$
$$p = \frac{12{,}5 \cdot 0{,}745}{7{,}6 + 12{,}5 \cdot 0{,}745} = \frac{9{,}3}{16{,}9}$$
$$\boldsymbol{p \sim 0{,}55 \text{ m}}$$

§ 14. Zusammensetzung paralleler und gleichgerichteter Kräfte.

In den Endpunkten einer materiell gedachten, starren Linie $\overline{AB}$ oder wie man auch anders sagen kann, in den Punkten A und B eines starren Körpers, greifen zwei parallele und gleich gerichtete Kräfte P und Q an, Fig. 36.

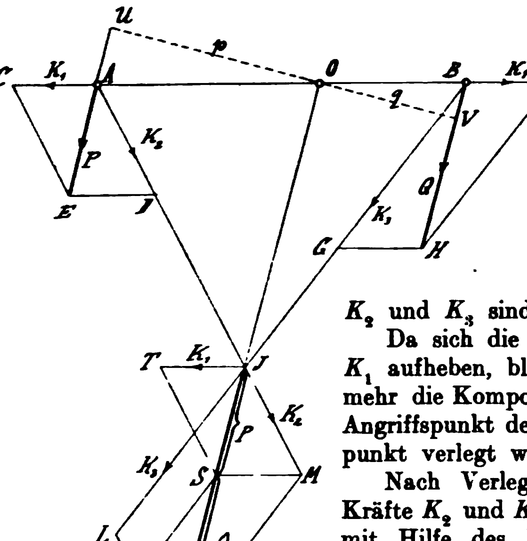


Fig. 36.

Es sind Größe, Richtung und Angriffspunkt der Resultierenden zu bestimmen.

Zunächst werden zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte K_1 in A und B hinzugefügt. Diese können als Komponenten von P und Q betrachtet werden. Die andern Komponenten K_2 und K_3 sind demnach auch bestimmt.

Da sich die entgegengesetzt gleichen Kräfte K_1 aufheben, bleiben für die Betrachtung nur mehr die Komponenten K_2 und K_3 übrig. Der Angriffspunkt derselben kann in ihren Schnittpunkt verlegt werden.

Nach Verlegung des Angriffspunktes der Kräfte K_2 und K_3 in Fig. 36 setze man letztere mit Hilfe des Parallelogrammes $IMNL$ zusammen. Die Resultierende IN ist nun parallel zu P und Q, ihre Größe ist $(P+Q)$.

Beweis: Da die Parallelogramme $ACED$ und $IMSF$ kongruent sind, ist zunächst

$$\overline{IS} \# \overline{AE} \# P$$

Werden $\overline{SR}$ und $\overline{MN}$ parallel und gleich $\overline{BG} = K_3$ gemacht, so sind auch die Parallelogramme $SMRN$ und $BFGH$ kongruent, daher

$$\overline{SN} \# \overline{BH} \# Q$$

Nun ist $IN = \overline{SI} + \overline{SN}$ die Resultierende R, also ist

$$\boldsymbol{R = P + Q} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (43)$$

„Die Resultierende paralleler und gleichgerichteter Kräfte ist parallel zu letzteren und ihre Größe ist gleich der Summe derselben.“

Der Angriffspunkt der Resultierenden kann nun nach O verlegt werden. Die Lage derselben ist zunächst bestimmt durch die Werte von p und q. Für den Fall des Gleichgewichtes muß nach dem Momentensatz sein

$$P \cdot p = Q \cdot q \text{ oder}$$
$$P : Q = q : p$$

Nun sind die Dreiecke AOU und BOV ähnliche, daher ergibt sich

$$q : p = \overline{BO} : \overline{AO}, \text{ somit}$$

$$\boldsymbol{P : Q = \overline{BO} : \overline{AO}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (44a)$$

„Die Kräfte verhalten sich verkehrt wie die Entfernungen ihrer Angriffspunkte von dem Angriffspunkte der Resultierenden.“

„Der Angriffspunkt der Resultierenden liegt der größcrn Kraft näher.“

Beweis: Aus .... $P:Q = \overline{BO}:\overline{AO}$ ist

$$P:(P+Q) = BO:(BO+AO), \text{ d. h.}$$

$$\overline{BO} = \frac{P}{R}\cdot\overline{AB} \qquad \text{(44 b)}$$

Ebenso ergibt sich durch ähnliche Folgerung

$$\overline{AO} = \frac{Q}{R}\cdot\overline{AB} \qquad \text{(44 c)}$$

Wenn nun $Q > P$ ist, so ist auch $\overline{AO} > \overline{BO}$ oder $\overline{BO} < \overline{AO}$, d. h. O liegt Q näher als P.

Sind drei parallele, gleichgerichtete Kräfte vorhanden, so setze man erst zwei zusammen, dann diese Resultierende mit der dritten Kraft. Es wird die Größe der Totalresultierenden gleich der Summe der Größen der gegebenen Kräfte.

Zur Bestimmung des Angriffspunktes der Resultierenden mehrerer parallelen und gleichgerichteten Kräfte wird der Momentensatz angewendet.

Beispiele.

63) Zwei parallele Kräfte greifen in den Endpunkten einer 1,2 m langen Stange an. Ihre Größen sind 12 kg und 18 kg. Wie groß ist die Resultierende und welchen Abstand hat ihr Angriffspunkt von den Endpunkten der Stange?

Auflösung: $R = 12\text{ kg} + 18\text{ kg}$

$$\mathbf{R = 30\ kg}$$

Der Abstand des Angriffspunktes der Resultierenden von dem der Kraft 12 kg beträgt

$$\overline{AO} = \frac{18}{30}\cdot 1{,}2 = \frac{3\cdot 1{,}2}{5} = \frac{3{,}6}{5}$$

$$\overline{AO} = 0{,}72\text{ m}$$

Ebenso $\overline{BO} = \frac{12}{30}\cdot 1{,}2 = \frac{6\cdot 1{,}2}{15} = \frac{7{,}2}{15} = \frac{2{,}4}{5}$

$$\overline{BO} = 0{,}48\text{ m}$$

$$\overline{AO} + \overline{BO} = 1{,}2\text{ m (stimmt)}$$

64. Es soll eine möglichst einfache Konstruktion für den Mittelpunkt zweier paralleler Kräfte P und Q gefunden werden.

Auflösung: Man mache in Fig. 37 $\overline{AE} = Q$ und $\overline{BF} = P$. Sodann verbinde man E mit F. Die Gerade $\overline{EF}$ schneidet $\overline{AB}$ im gesuchten Mittelpunkt O der Kräfte. Der Beweis ergibt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke AEO und BFO.

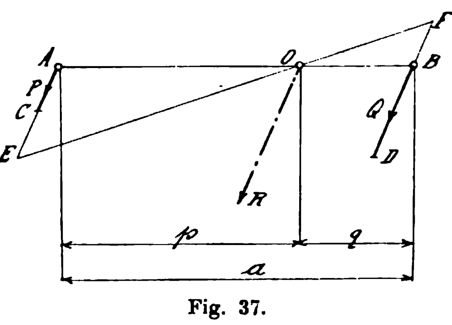


Fig. 37.

65. Für die in Fig. 38 gegebenen Kräfte den Mittelpunkt O zu finden.

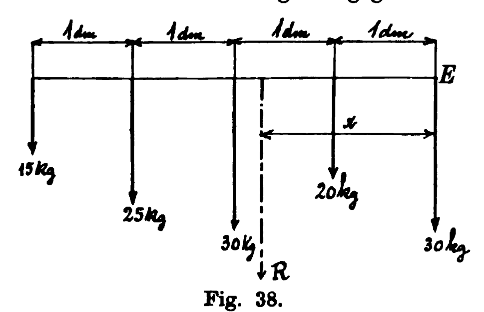


Fig. 38.

Auflösung: Laut Momentensatz gilt in bezug auf den Drehpunkt E

$$15 \cdot 4 + 25 \cdot 3 + 30 \cdot 2 + 20 \cdot 1 \, R \cdot x$$

$$R = 120 \text{ kg}$$

$$x = \frac{60 + 75 + 60 + 20}{120}$$

$$x = \frac{215}{120} = \frac{43}{24}$$

$$x = \mathbf{1{,}79 \text{ dm}}$$

§ 15. Ermittlung von Auflagerdrücken.

Befindet sich ein belasteter Träger auf zwei Stützen, so werden dieselben gewisse Drücke, welche **Stützdrücke** heißen, aufzunehmen haben. Statt der Stützen kann man sich nun in A und B, Fig. 39, zwei Kräfte R_1 und R_2

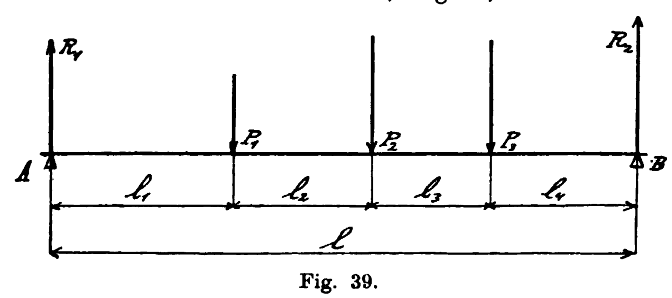


Fig. 39.

nach aufwärts angebracht denken, so daß der Träger in seiner Lage verbleibt. Diese letzteren Drücke heißen **Auflagerdrücke.** Sie können aufgefaßt werden als Resultierende aller vorhandenen Einzelnkräfte, so daß sie mit Hilfe des Momentensatzes leicht zu ermitteln sind. Um den Auflagerdruck R_1 zu finden, nimmt man den Punkt B als Drehpunkt an, um R_2 zu bestimmen, stellt man die Momentengleichung in bezug auf den Punkt A auf, weil sich dann Beziehungen ergeben, die nur je eine Unbekannte enthalten.

$$R_1 \cdot l = P_1 (l_2 + l_3 + l_4) + P_2 (l_3 + l_4) + P_3 \cdot l_4$$

$$R_1 = \frac{P_1 (l_2 + l_3 + l_4) + P_2 (l_3 + l_4) + P_3 l_4}{l}$$

ebenso

$$R_2 = \frac{P_1 \cdot l_1 + P_2 (l_1 + l_2) + P_3 (l_1 + l_2 + l_3}{l}$$

Sind die Auflagerdrücke richtig bestimmt, dann muß ihre Summe gleich sein der Summe der Einzelnkräfte.

Beispiele.

66. Ein Träger, welcher 1,5 m lang ist, liegt mit beiden Enden auf Stützen. In der Mitte greift eine Last von 25 kg, 0,3 m vom rechten Ende eine Last von 45 kg an. Wie groß sind die Auflagerdrücke?

Auflösung: Der rechte Auflagerdruck ist

$$R_1 = \frac{25 \cdot 0{,}75 + 45 \cdot 1{,}2}{1{,}5} = \frac{5 \cdot 0{,}75 + 9 \cdot 1{,}2}{0{,}3}$$

$$R_1 = 12{,}5 + 36$$

$$R_1 = 48{,}5 \text{ kg.}$$

Der linke wird $R_2 = \frac{25 \cdot 0{,}75 + 45 \cdot 0{,}3}{1{,}5} = 25 \cdot 0{,}5 + 9$

$$R_2 = 21{,}5 \text{ kg}$$

$$R_1 + R_2 = 48{,}5 + 21{,}7 = 70 \text{ kg (stimmt).}$$

67. Die Auflagerdrücke des nach Fig. 40 belasteten Trägers zu bestimmen.

Auflösung: In bezug auf B gilt

$$R_1 \cdot 1300 - 5000 \cdot 1600 = 0$$

$$R_1 = \frac{5000 \cdot 16}{13} = \frac{80000}{13}$$

$$R_1 = 6150 \text{ kg.}$$

Fig. 40.

Der Auflagerdruck R_2 wurde nach aufwärts wirkend angenommen; er ergibt sich negativ, d. h. er wirkt nach abwärts. Aus der Anschauung folgt dies sofort

$$5000 \cdot 300 + R_2 \cdot 1300 = 0$$

$$R_2 = -\frac{5000 \cdot 3}{13}$$

$$R_2 = -1150 \text{ kg.}$$

68. Die Auflagerdrücke des nach Fig. 41 belasteten Trägers zu ermitteln.

Auflösung:

$$-1500 \cdot 2{,}75 + R_1 \cdot 2 - 4000 \cdot 1 + 1500 \cdot 1 = 0$$

$$R_1 = 750 \cdot 2{,}75 + 2000 - 750$$

$$R_1 = 750 \cdot 1{,}75 + 2000$$

$$\mathbf{R_1 = 3312{,}5 \text{ kg}}$$

$$-1500 \cdot 0{,}75 + 4000 \cdot 1 - R_2 \cdot 2 + 1500 \cdot 3 = 0$$

$$R_2 = 2000 + \frac{1500 \cdot 2{,}25}{2}$$

$$\mathbf{R_2 = 3687{,}5 \text{ kg}}$$

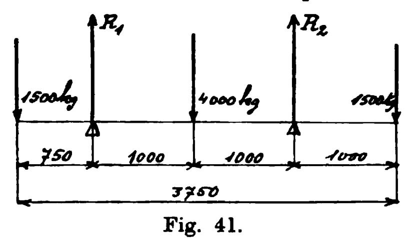


Fig. 41.

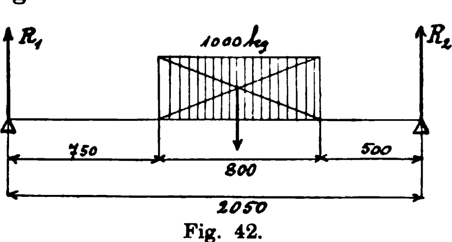


Fig. 42.

69. Die Auflagerdrücke des in Fig. 42 belasteten Trägers zu bestimmen.

Auflösung: Die Last von 1000 kg kann im Mittelpunkte ihres Aufliegens angreifend angesehen werden.

$$R_1 \cdot 1{,}8 = 1000 \cdot 0{,}65$$

$$\mathbf{R_1 = \frac{650}{1{,}8} = 360\ kg}$$

Ebenso
$$\mathbf{R_2 = \frac{1150}{1{,}8} = 640\ kg}$$

70. Eine 4 m lange Achse, welche beiderseits mittels Zapfen gelagert ist, ist 1,2 m vom linken Ende mit 12000 kg und 1 m vom rechten Ende 8000 kg belastet. Man suche die Auflagerdrücke.

Auflösung: Der linke Auflagerdruck wird

$$R_1 = \frac{12000 \cdot 2{,}8 + 8000 \cdot 1}{4} = 3000 \cdot 2{,}8 + 2000$$

$$\mathbf{R_1 = 10400\ kg}$$

Der rechte Auflagerdruck ergibt sich mit

$$R_2 = \frac{8000 \cdot 3 + 12000 \cdot 1{,}2}{4} = 2000 \cdot 3 + 3000 \cdot 1{,}2$$

$$\mathbf{R_2 = 9600\ kg}$$

§ 16. Vom Kräftepaar.

Werden zwei parallele Kräfte, welche einen festen Körper in 2 Punkten A und B angreifen, einander gleich, aber sind sie entgegengesetzt gerichtet, so ist laut Gleichung (43)

$$R = o,$$

d. h. für diese beiden Kräfte gibt es keine Resultierende. Der Körper kann also vor allem keine fortschreitende Bewegung annehmen. Aufheben aber können sich die Kräfte nicht. Da das Drehungsbestreben der Kräfte nun in demselben Sinne vorhanden ist, wird der Körper eine drehende Bewegung ausführen.

Deshalb nennt man zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte mit fest verbundenen Angriffspunkten ein **Drehungs- oder Kräftepaar.**

Die Entfernung beider Angriffspunkte heißt der **Arm des Kräftepaares,** das Produkt aus der Größe einer Kraft und dem senkrechten Abstand beider Kräfte wird **statisches Moment des Kräftepaares** genannt.

Die Anwendung von Kräftepaaren wird bereits in den folgenden Paragraphen erfolgen.

§ 17. Rechnerische Ermittlung der Resultierenden mehrerer beliebiger Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten. Bedingungen des Gleichgewichtes mehrerer beliebiger Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten.

Diese Aufgabe läßt sich zum Teil auf die in § 11 gelöste zurückführen. In Fig. 43 seien die Kräfte P_1, P_2, P_3 .... gegeben. In der Ebene der Kräfte werden zunächst zwei aufeinander senkrecht stehende Achsen $\overline{OX}$ und $\overline{OY}$ verzeichnet. Dann werden in O die zu den gegebenen Kräften parallelen und entgegengesetzt gleichen Kräfte P_1, P_2.... angebracht.

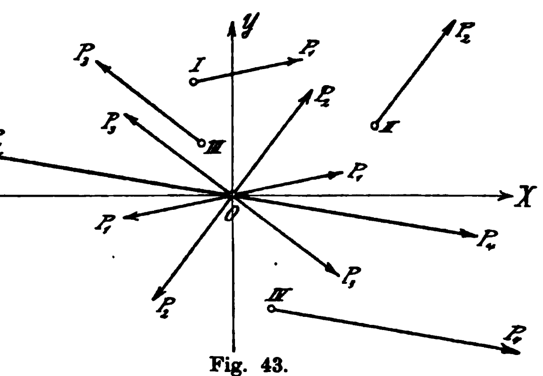


Fig. 43.

Auf diese Art sind in O vorhanden:

a) n Einzelnkräfte,
b) n Kräftepaare.

Dieselbe Wirkung wie die gegebenen Kräfte bringen nun die Resultierende der n in O angreifenden Kräfte und das resultierende Kräftepaar hervor. —

Gleichgewicht ist vorhanden, wenn daher die Gleichungen existieren:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma(H) &= 0 \\ \Sigma(V) &= 0 \\ \Sigma(M) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

Beispiele.

71. In einer vertikalen Ebene ist ein Balken an eine vertikale zu ersterer senkrechte Ebene gelehnt und in der Horizontalen am Ausweichen gehindert. Wie groß sind die vorkommenden Drücke? Fig. 44. — Gegeben das Gewicht des Stabes und der Winkel α. —

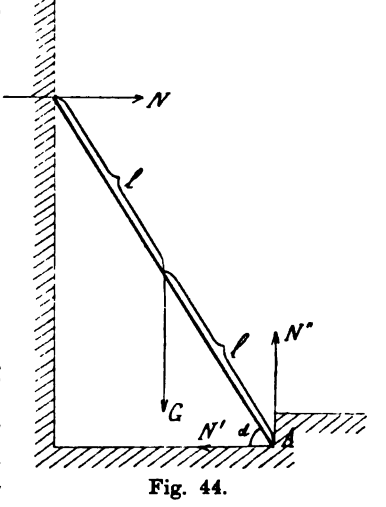


Fig. 44.

Auflösung:

$$N = N'$$
$$N'' = G.$$

In bezug auf den Drehpunkt A ist

$$N \cdot 2l \sin\alpha - G \cdot l \cdot \cos\alpha = 0$$
$$N'' = G$$
$$N = \frac{1}{2} G \cot\alpha = N'$$

72. Ein Stab mit dem Gewichte G kg liegt mit dem einen Ende auf einer horizontalen und mit dem andern Ende auf einer schiefen Ebene, welche mit dem Horizonte den Winkel α bildet. Von letzterem Ende geht

ein Faden aus, der am oberen Ende der schiefen Ebene über eine Rolle geht Welches Gewicht ist an dessen Ende zu hängen, damit Gleichgewicht besteht

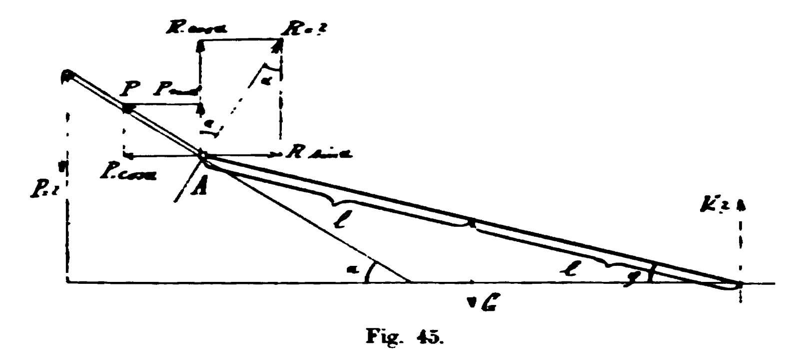


Fig. 45.

und wie groß sind die Drücke des Stabes auf die schiefe Ebene? Fig. 45.

Auflösung:

$$\Sigma(H)=0 \;\ldots\; R\sin\alpha = P\cdot\cos\alpha$$

$$\Sigma(V)=0 \;\ldots\; G - V - R\cos\alpha - P\sin\alpha = 0$$

$$\Sigma(M)_A=0 \;\ldots\; G\cdot l\cos\varphi = V\cdot 2l\cos\varphi.$$

Aus letzterer Gleichung wird $G = 2V$

$$V = \frac{G}{2}$$

In die zweite Gleichung wird der Wert für V eingesetzt, so daß folgt

$$G - \frac{G}{2} - R\cos\alpha - P\cdot\sin\alpha = 0$$

$$\frac{G}{2} = R\cos\alpha - P\cdot\sin\alpha.$$

Aus erster Gleichung ist .... $R = \frac{P\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha}$, somit

$$\frac{G}{2} = \frac{P\cos\alpha}{\sin\alpha}\cos\alpha - P\sin\alpha = P\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin\alpha} \text{ oder}$$

$$G = \frac{2P}{\sin\alpha}$$

$$P = \frac{G\cdot\sin\alpha}{2}, \quad R = \frac{G\cdot\cos\alpha}{2}$$

73. Die Aufgabe 51 mittels der in diesem Paragraphen angegebenen Methode zu lösen.

Auflösung: Die Auflagerdrücke N und N' werden zunächst in Horizontal- und Vertikalkomponenten zerlegt. Erstere sind $N\sin\alpha$ und $N'\sin\alpha'$, letztere $N\cos\alpha$ und $N'\cos\alpha'$. — Demnach werden

$$N \sin \alpha = N' \sin \alpha'$$

$$G + G' = N \cos \alpha + N' \cos \alpha'$$

$$N' = N \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'}$$

$$G + G' = N \cos \alpha + N \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} \cos \alpha'$$

$$G + G' = N \left(\cos \alpha + \frac{\sin \alpha \cos \alpha'}{\sin \alpha'} \right)$$

$$G + G' = N \cdot \frac{\sin (\alpha + \alpha')}{\sin \alpha'}$$

$$N = \frac{(G + G') \cdot \sin \alpha'}{\sin (\alpha + \alpha')}$$

$$N' = \frac{(G + G') \sin \alpha}{\sin (\alpha + \alpha')}$$

In bezug auf den Kugelmittelpunkt M' gilt

$$N \cos \alpha \cdot a \cos \varphi + N \sin \alpha \cdot a \sin \varphi - G a \cos \varphi = 0$$

$$N \cos \alpha + N \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi = G$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{G - N \cdot \cos \alpha}{N \sin \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{G - \frac{(G + G') \sin \alpha'}{\sin (\alpha + \alpha')} \cdot \cos \alpha}{\frac{(G + G') \sin \alpha'}{\sin (\alpha + \alpha')} \cdot \sin \alpha} = \frac{G \cdot \sin (\alpha + \alpha') - (G + G') \sin \alpha' \cos \alpha}{(G + G') \cdot \sin \alpha' \sin \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{G \sin \alpha \cos \alpha' + G \cos \alpha \sin \alpha' - G \sin \alpha' \cos \alpha - G' \sin \alpha' \cos \alpha}{(G + G') \sin \alpha' \sin \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{G \cot \alpha' - G' \cot \alpha}{G + G'}$$

74. Ein Stab liegt über einer horizontalen Mauerkante B, mit welcher er einen rechten Winkel bildet. Sein unteres Ende findet auf der Horizontalebene in A ein Hindernis gegen Ausgleiten. Das Gewicht des Stabes ist G kg, die Auflagerlänge l, die Höhe der Mauerkante B über der Horizontalen h, die Entfernung der Mauer vom Hindernis $A \ldots b$ und die Entfernung der Richtung des Eigengewichtes des Stabes vom Hindernis a. — Man bestimme die vorkommenden Drücke? Fig. 46.

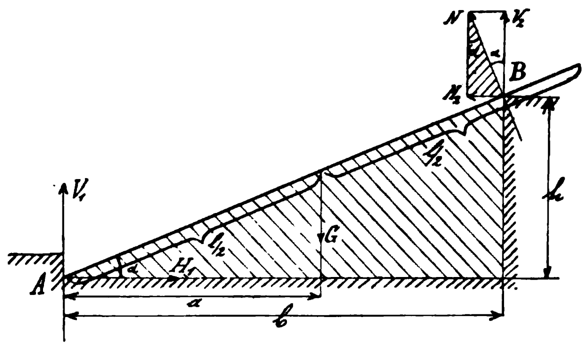


Fig. 46.

Auflösung: Bekannt sind die Größen G, a, b, h, l

$$H_1 = H_2$$

$$G = V_1 + V_2$$

In bezug auf A wird

$$G \cdot a - H_2 \cdot h - V_2 \cdot b = 0.$$

Diese drei Gleichungen enthalten vier Unbekannte. Es ist daher noch eine Gleichung zur Lösung der Aufgabe nötig. Diese Gleichung ergibt sich wegen Ähnlichkeit der schraffierten Dreiecke mit

$$\frac{H_2}{V_2} = \frac{h}{b}.$$

Daraus ist

$$H_2 = \frac{h}{b} \cdot V_2.$$

Demnach wird

$$G \cdot a - \frac{h}{b} \cdot V_2 \cdot h - V_2 \cdot b = 0$$

$$G \cdot a = V_2 \left(\frac{h^2}{b^2} + b\right) = V_2 \frac{h^2 + b^2}{b} = V_2 \cdot \frac{l^2}{b}$$

$$V_2 = G \frac{a \cdot b}{l^2}$$

$$H_1 = H_2 = G \cdot \frac{ah}{l^2}$$

$$V_1 = G - V_2 = G - G \frac{ab}{l^2}$$

$$V_1 = G \frac{l^2 - ab}{l^2}$$

$$N = \sqrt{H_2^2 + V_2^2} = \sqrt{G^2 \cdot \frac{a^2 h^2}{l^4} + G^2 \cdot \frac{a^2 b^2}{l^4}} = \frac{G \cdot a}{l^2} \cdot \sqrt{h^2 + b^2}$$

$$N = G \cdot \frac{a}{l}$$

75. Ein Stab lehnt sich gegen zwei in einer Horizontalen sich schneidenden, schiefen Ebenen, welche mit dem Horizonte die Winkel α und α' bilden. —

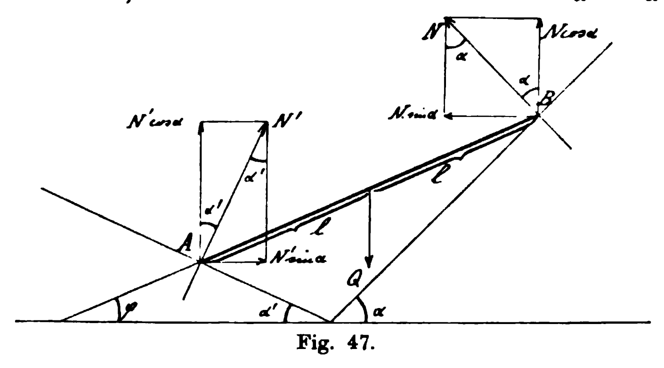


Fig. 47.

Welchen Winkel schließt der Stab mit der Horizontalen ein, wenn er im Gleichgewicht ist? Fig. 47.

Auflösung: $Q = N \cdot \cos\alpha + N' \cos\alpha'$

$$N \sin\alpha = N' \sin\alpha'$$

$$N' = N \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'},$$

$$Q = N \cdot \cos\alpha + N \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} \cdot \cos\alpha'$$

$$N = \frac{Q}{\cos\alpha + \sin\alpha \cot\alpha'} \quad \text{und}$$

$$N' = \frac{Q}{\cos\alpha + \sin\alpha \cot\alpha'} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}.$$

In bezug auf den Drehpunkt A gilt

$$Q \cdot l \cdot \cos\varphi = N \cdot \cos\alpha \cdot 2l \cos\varphi + N \cdot \sin\alpha \cdot 2l \sin\varphi$$

$$Q \cdot \cos\varphi = \frac{Q}{\cos\alpha + \sin\alpha \cdot \cot\alpha'} \cdot \underbrace{(2\cos\varphi\cos\alpha + 2\sin\alpha\sin\varphi)}_{2\cos(\alpha - \varphi)}$$

$$\cos\varphi\left(\cos\alpha + \sin\alpha \cdot \frac{\cos\alpha'}{\sin\alpha'}\right) = 2\cos(\alpha - \varphi)$$

$$\cos\varphi \cdot \sin(\alpha + \alpha') = 2\sin\alpha' \cdot \cos(\alpha - \varphi)$$

$$\cos\varphi \cdot \sin(\alpha + \alpha') = 2\sin\alpha' \cdot (\cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi)$$

$$\sin(\alpha + \alpha') = 2\sin\alpha'(\cos\alpha + \sin\alpha\, tg\,\varphi)$$

$$2\sin\alpha\sin\alpha'\, tg\,\varphi = \sin\alpha\cos\alpha' + \cos\alpha\sin\alpha' - 2\sin\alpha'\cos\alpha$$

$$2\sin\alpha\sin\alpha'\, tg\,\varphi = \sin\alpha\cos\alpha' - \cos\alpha\sin\alpha'.$$

Beide Seiten der Gleichung durch $2\sin\alpha\sin\alpha'$ dividiert, ergibt

$$tg\,\varphi = \frac{1}{2}(\cot\alpha' - \cot\alpha).$$

76. Ein Stab lehnt sich gegen eine horizontale und gegen eine vertikale Ebene. In einem Punkte ist er mit einem Faden verbunden, dessen anderes Ende im Schnittpunkte erstgenannter Ebenen fest ist. Welche Spannung entsteht im Faden, wenn er mit der Horizontalen nach Annahme der Gleichgewichtslage des Stabes den Winkel β und der Stab mit ihr den Winkel α bildet? Fig. 48.

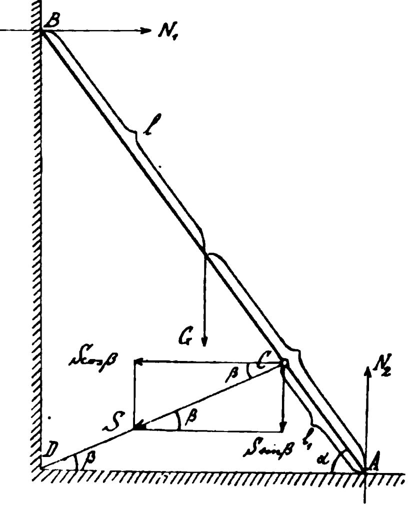


Fig. 48.

Auflösung:

a) $\Sigma(H) = 0 \ldots . N_1 = S \cdot \cos\beta$

b) $\Sigma(V) = 0 \ldots . G + S \cdot \sin\beta - N_2 = 0$

$$N_2 = G + S\sin\beta$$

c) $\Sigma(M) = 0$, z. B. in bezug auf Drehpunkt A.

$$N_1 \cdot 2l \sin\alpha - G \cdot l \cdot \cos\alpha - S \cdot \cos\beta \cdot l_1 \sin\alpha - S \cdot \sin\beta \cdot l_1 \cos\alpha = 0.$$

$$S \cdot \cos\beta \cdot 2l \sin\alpha - S \cos\beta \cdot l_1 \sin\alpha - S \sin\beta\, l_1 \cos\alpha = G\, l \cos\alpha$$

$$S \cdot [2l \sin\alpha\cos\beta - l_1 \sin\alpha\cos\beta - l_1 \sin\beta\cos\alpha] = G \cdot l \cdot \cos\alpha$$

$$S \cdot \left[2 \cdot \sin\alpha\cos\beta - \frac{l_1}{l}\sin\alpha\cos\beta - \frac{l_1}{l}\sin\beta\cos\alpha\right] = G\cos\alpha$$

$$S \cdot \left[2\sin\alpha\cos\beta - \frac{l_1}{l}(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)\right] = G \cdot \cos\alpha$$

$$S \cdot \left[2\sin\alpha\cos\beta - \frac{l_1}{l} \cdot \sin(\alpha+\beta)\right] = G \cdot \cos\alpha.$$

Aus $\triangle ACD$ folgt .... $l_1 : 2l\cos\alpha = \sin\beta : \sin(\alpha+\beta)$, also

$$\frac{l_1}{l} = \frac{2\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Dann wird .... $S \cdot \left[2\sin\alpha\cos\beta - \frac{2\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \cdot \sin(\alpha+\beta)\right] = G \cdot \cos\alpha$

$$2S \cdot (\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta) = G \cdot \cos\alpha$$

$$2S \cdot \sin(\alpha-\beta) = G \cdot \cos\alpha$$

$$S = \frac{G}{2} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$$

77. Zwei Stäbe in einer Vertikalebene stehen auf einer horizontalen Ebene. Ihre unteren Enden sind durch einen Faden verbunden. Das obere Ende des einen Stabes ist mit irgend einem Punkte des zweiten durch ein Gelenk verbunden. Wie groß ist die Spannung des Fadens? Fig. 49.

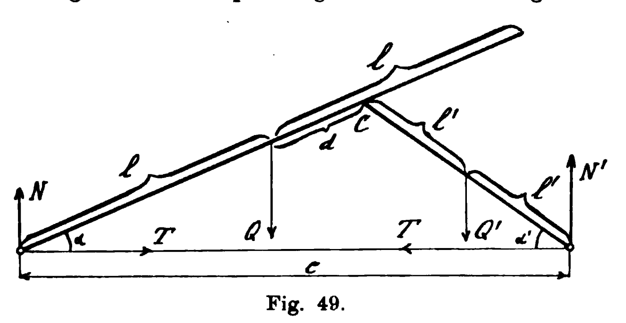


Fig. 49.

Auflösung: Gegeben sind die Stablängen $2l$ und $2l'$, die Stabgewichte Q und Q', die Stabneigungen gegen die Horizontale α und α' und die Fadenlänge c

$$Q + Q' = N + N'.$$

In bezug auf C gilt

$$T \cdot (l+d)\sin\alpha + Q \cdot d\cos\alpha - N \cdot (l+d) \cdot \cos\alpha = 0$$

$$T \cdot 2l'\sin\alpha' + Q'l'\cos\alpha' - N' \cdot 2l'\cos\alpha' = 0.$$

Aus 1. Gleichung .... $N = T \cdot \operatorname{tg}\alpha + Q\frac{d}{l+d}$

Aus 2. Gleichung.... $N' = T \cdot \mathrm{tg}\,\alpha' + \frac{1}{2} Q'$

$$Q + Q' = T \cdot \mathrm{tg}\,\alpha + Q \frac{d}{l+d} + T \cdot \mathrm{tg}\,\alpha' + \frac{1}{2} Q'$$

$$T \cdot \mathrm{tg}\,\alpha + T \cdot \mathrm{tg}\,\alpha' = Q + Q' - Q \frac{d}{l+d} - \frac{1}{2} Q'$$

$$T \cdot (\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha') = \frac{Q\,l + Q\,d - Q\,d}{l+d} + \frac{1}{2} Q' = \frac{Q \cdot l}{l+d} + \frac{1}{2} Q'$$

$$\frac{2\,l'}{l+d} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}, \text{ folgt } \frac{l'}{l+d} = \frac{\sin\alpha}{2\sin\alpha'} = \frac{l}{l+d} \cdot \frac{l'}{l}$$

d. h. $2\,l' \sin\alpha' = (l + d) \sin\alpha$

$$T \cdot (\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha') = \frac{1}{2} Q' + Q \frac{l \cdot \sin\alpha}{2\,l' \sin\alpha'} = \frac{Q'\,l' \sin\alpha' + Q\,l \sin\alpha}{2\,l' \sin\alpha'}$$

$$T = \frac{Q \cdot l \sin\alpha + Q'\,l' \sin\alpha'}{2\,l' \sin\alpha' (\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha')}.$$

Da $\frac{c}{2\,l'} = \frac{\sin(\alpha + \alpha')}{\sin\alpha}$, folgt $c \cdot \sin\alpha = 2\,l' \sin(\alpha + \alpha')$; ferner ist

$$\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha' = \frac{\sin(\alpha + \alpha')}{\cos\alpha \cdot \cos\alpha'}$$

$$T = \frac{Q \cdot l \sin\alpha + Q'\,l' \sin\alpha'}{2\,l' \sin\alpha' \cdot \frac{\sin(\alpha + \alpha')}{\cos\alpha \cdot \cos\alpha'}}$$

$$T = \frac{Q\,l \sin\alpha + Q'\,l' \sin\alpha'}{2\,l' \sin\alpha' \frac{c \cdot \sin\alpha}{2\,l' \cos\alpha \cos\alpha'}}, \text{ somit } \ldots\ldots \boldsymbol{T = \frac{Q\,l \sin\alpha + Q'\,l' \sin\alpha'}{c \cdot \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\alpha'}}.$$

§ 18. Graphische Ermittlung der Resultierenden mehrerer beliebiger Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten. Graphische Darstellung des Drehmomentes.

Es seien, Fig. 50a, die Kräfte P_1, P_2, P_3 und P_4 gegeben. Behufs Auffindens des Weges zur Ermittlung der Resultierenden derselben auf graphischem Wege dienen folgende Erwägungen.

Man nehme in der Richtung der Kraft P_1 einen Punkt I an und zerlege dort P_1 in die Komponenten S_1 und S_2. Im Sehnittpunkte von S_2 mit P_2, d. i. in II, werde P_2 durch die Komponenten $(-S_2)$ und S_3 ersetzt. Im Schnittpunkte von S_3 mit P_3, d. i. in III, werde P_3 in S_4 und $(-S_3)$ zerlegt usw. Es ergibt sich somit folgendes Schema:

$$\begin{array}{cccccccc} \multicolumn{2}{c}{P_1} & \multicolumn{2}{c}{P_2} & \multicolumn{2}{c}{P_3} & \multicolumn{2}{c}{P_4} \\ S_1, & S_2, & (-S_2), & S_3, & (-S_3), & S_4, & (-S_4), & S_5 \end{array}$$

Da sich S_2 und $(-S_2)$, S_3 und $(-S_3)$ .... aufheben, bleiben nur die Kräfte S_1 und S_5 übrig. Sie bringen dieselbe Wirkung hervor wie die ge-

gegebenen Kräfte P_1, P_2, P_3 und P_4. Ihre Resultierende ist daher auch die Resultierende der gegebenen Kräfte, greift also im Mittelpunkte V an.

Reiht man, Fig. 50b, die Kräfte P_1, P_2, P_3 und P_4 nach Größe und Richtung aneinander und verbindet man je ihre Endpunkte mit einem beliebigen Punkte O, dem sogenannten **Pole**, so ist es zweckmäßig, letztere Strahlen, die sogenannten **Polstrahlen**, als obgenannte Komponenten S zu nehmen. Wie die Figur zeigt, ist dann tatsächlich P_1 zerlegt in S_1 und S_2, P_2 zerlegt in $(-S_2)$ und S_3 usw. Die Totalresultierende R ist als Resultierende von S_1 und S_5 zu erkennen.

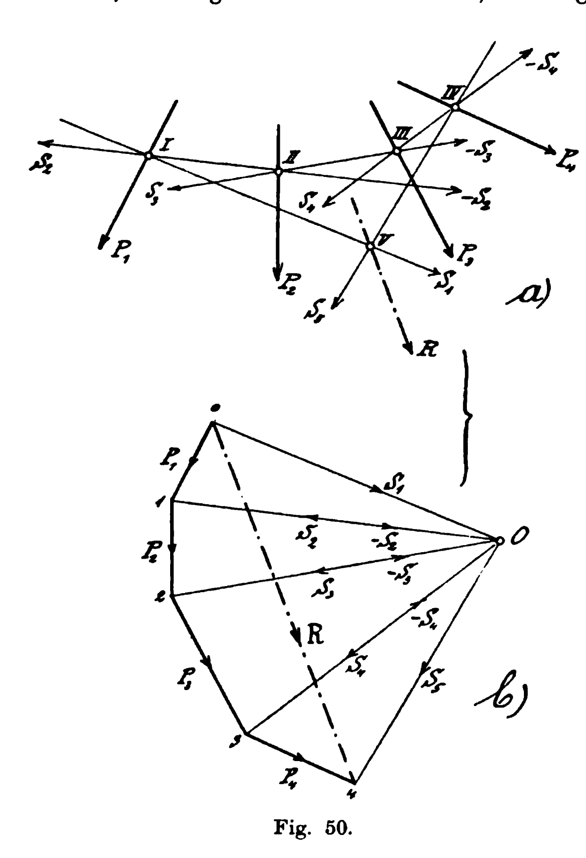


Fig. 50.

Auf Grund dieser Betrachtungen schlage man daher folgenden Weg zur Aufsuchung der Resultierenden mehrerer Einzelkräfte mit verschiedenen Angriffspunkten ein.

„Man reihe die Kräfte nach Größe und Richtung aneinander, nehme einen beliebigen Pol an und ziehe die Polstrahlen. Hierauf zeichne man durch einen Punkt I der ersten Kraft je eine Parallele zum ersten und zum zweiten Polstrahl und zwar letztere Parallele bis zur zweiten Kraft, d. h. bis II. Dann ziehe man durch II eine Parallele zum dritten Polstrahl bis zur dritten Kraft, d. h. bis III, durch letzteren Punkt eine Parallele zum vierten Polstrahl bis zur nächsten Kraft, usw. Der Schnittpunkt der äußersten Polstrahlen ergibt den Angriffspunkt der Resultierenden."

„Kräftezug und Polstrahlen zusammen heißen **Kräftepolygon**, der Linienzug I, II, III, IV, V wird **Seilpolygon** genannt."

„Die Größe und Richtung der Resultierenden ergibt sich aus dem Kräftepolygon."

„Das Verfahren bleibt dasselbe, wenn die Resultierende mehrerer parallelen Kräfte gesucht werden soll."

Im Anschlusse an obige einfache Betrachtungen soll nun gleich gezeigt werden, wie das Drehmoment mehrerer Kräfte in bezug auf einen bestimmten Drehpunkt graphisch gefunden wird.

In Fig. 51 ist mittels des soeben beschriebenen Verfahrens Größe, Angriffspunkt und Richtung der Resultierenden der Kräfte P_1, P_2, P_3 und P_4

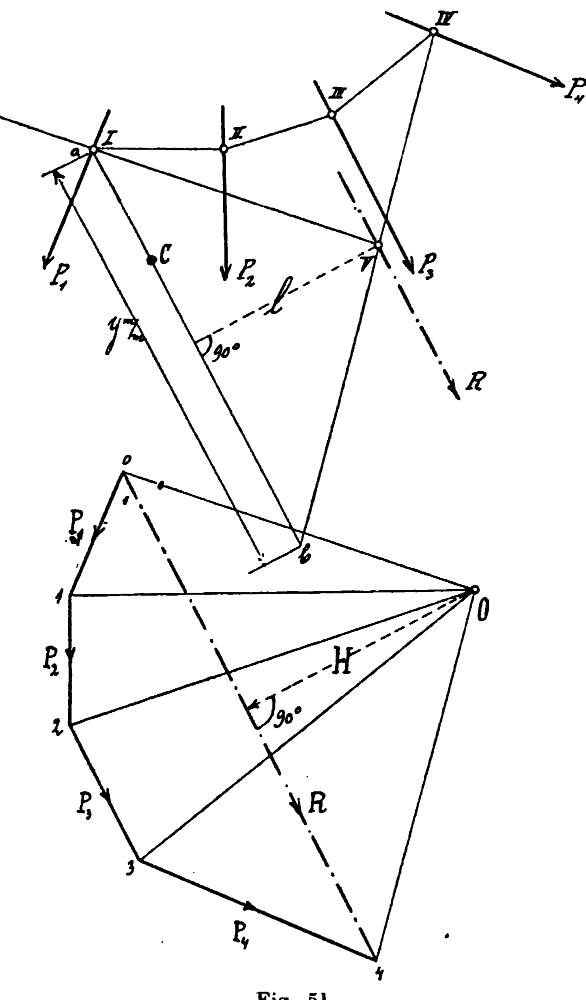


Fig. 51.

gesucht worden. In bezug auf den Drehpunkt C ist das Drehmoment

$$M = R \cdot l.$$

Durch C werde eine Parallele zu R zwischen den äußersten Seilpolygonseiten $y = \overline{ab}$ verzeichnet. Nun ist laut Figur

$$\triangle abV \sim \triangle oO4, \text{ daher}$$

$$y : l = R : H \text{ oder}$$

$$\boldsymbol{M = R \cdot l = H \cdot y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

„H heißt **Poldistanz.**"

„Man findet somit das Drehmoment mehrerer Kräfte, indem man die Poldistanz H mit der zwischen den äußersten Seilpolygonseiten liegenden und durch den Drehpunkt parallel zur Resultierenden gezogenen Strecke y multipliziert."

Beispiele.

78. Zwei durch ein Gelenk verbundene Stäbe $\overline{ab}$ und $\overline{bc}$ liegen in einer vertikalen Ebene und stützen sich mit den freien Enden auf eine horizontale. An ihrer Verbindungsstelle wirkt eine Kraft P nach abwärts. Wie groß sind die Drücke in den Stangen und welche Beanspruchungen erfahren die Auflagestellen? Fig. 52.

Auflösung: Mittels Kräftepolygons werde zunächst P in K_1 und K_2

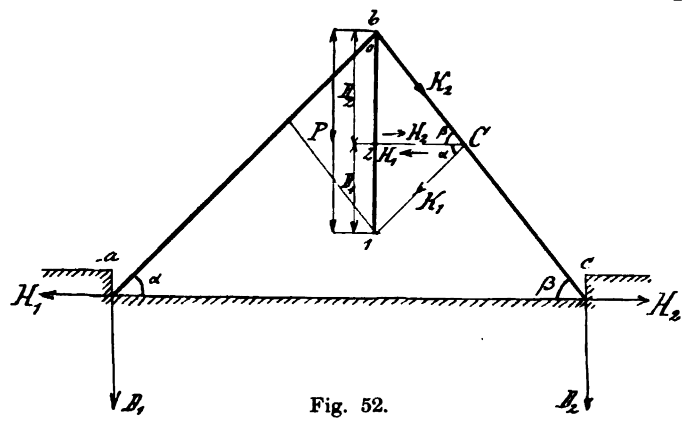


Fig. 52.

zerlegt, wodurch sich Pol C ergibt. Durch Verzeichnen des Polstrahles $\overline{C2}$ folgen die Größen von $H_1 = H_2$, von D_1 und D_2.

Sind die Winkel α und β bekannt, so lassen sich die Beanspruchungen auch analytisch ermitteln.

$$D_1 = H_1 \operatorname{tg} \alpha$$

$$D_2 = H_2 \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

Da $D_1 + D_2 = P$ ist, wird $P = H_1 (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)$, woraus

$$\boldsymbol{H_1} = \boldsymbol{H_2} = \frac{\boldsymbol{P}}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} \text{ folgt.}$$

Dann wird

$$\boldsymbol{D_1} = \frac{\boldsymbol{P} \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = \boldsymbol{P} \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos (\alpha + \beta)}$$

$$\boldsymbol{D_2} = \frac{\boldsymbol{P} \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = \boldsymbol{P} \frac{\sin \beta \cos \alpha}{\cos (\alpha + \beta)}$$

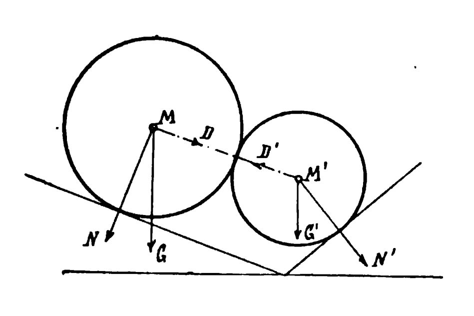


Fig. 53.

79. Die Aufgabe 51 graphisch zu lösen. Fig. 53.

Auflösung:

Die Kräfte G und G' werden verzeichnet. Hierauf werden die Polstrahlen $\overline{C0}$ und $\overline{C2}$ parallel zu N und N' gezogen. Die Verbindungslinie $\overline{C1}$ ergibt dann die Lage der Zentrale der Kugeln, wenn diese sich im Gleichgewichte befinden.

80. Wie groß muß die in D, Fig. 54, angreifende Kraft K sein, damit der Hebel im Gleichgewicht bleibe?

Auflösung: Man trage $P_1 = \overline{0,1}$ und $P_2 = \overline{1,2}$ an und wähle einen beliebigen Pol C_1. Nach Verzeichnung der Polstrahlen ziehe man $\overline{I\,IV} \parallel \overline{0C_1}$, $\overline{I\,II} \parallel \overline{1,C_1}$ und $\overline{II\,III} \parallel \overline{2,C_1}$.

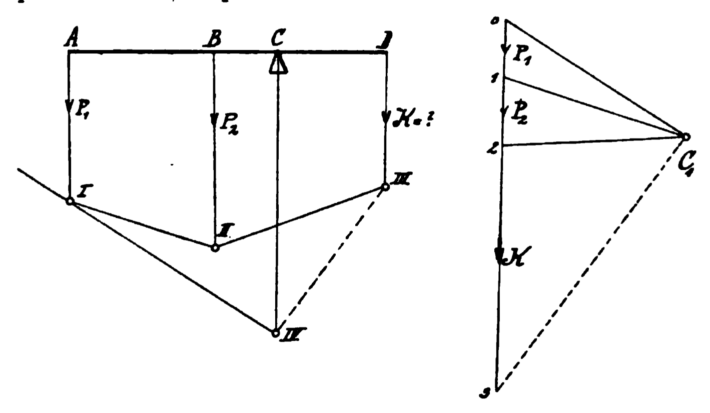


Fig. 54.

Soll nun Gleichgewicht vorhanden sein, so muß die Resultierende von P_1, P_2 und K durch C hindurchgehen, d. h. auch durch den Punkt IV. $\overline{III\,IV}$ ist somit der letzte Polstrahl. Wird im Kräftepolygon $\overline{C_1 3} \parallel \overline{III\,IV}$ gezogen, so folgt mit $\overline{2,3}$ die gesuchte Größe der Kraft K.

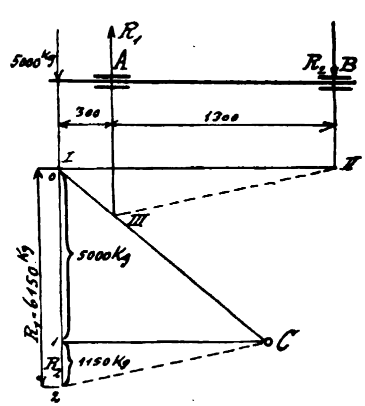


Fig. 55.

81. Die Auflagerdrücke R_1 und R_2 in Beispiel 67 sind graphisch zu ermitteln. Fig. 55.

Auflösung: Man nehme in der Richtung von 5000 kg einen Punkt I an und ziehe durch ihn die Parallelen zu den Polstrahlen $\overline{0,C}$ und $\overline{1,C}$. $\overline{II\,III}$ ergibt sich dann als Schlußlinie des Seilpolygones. Wird im Kräftepolygon $\overline{C,2} \parallel \overline{II\,III}$ gezogen, so ergibt sich $R_1 = \overline{0,2}$ und $R_2 = \overline{1,2}$ und zwar ist R_1 hinaufgerichtet, während R_2 nach abwärts wirkt.

82. Die Theorie der Dezimalwage soll graphisch gegeben werden. Fig. 56.

Auflösung: Die Last Q ruhe irgendwo auf der Brücke. Dieselbe werde durch das Kräftepolygon zunächst in die Komponenten I und II zerlegt. Zu diesem Ende ziehe man

$$\left.\begin{array}{l}\overline{ga_1} \parallel \overline{O,0} \\ \overline{gc} \parallel \overline{O,1}\end{array}\right\} \text{Wird } \overline{O,2} \parallel \overline{a_1 c} \text{ gemacht, folgen} \left\{\begin{array}{l}\overline{O,2} = Z \\ \overline{2,1} = X\end{array}\right.$$

Verzeichnet man im Kräftepolygon $\overline{O,3} \parallel \overline{ab}$, dann ergeben sich $\overline{0,3} = Y_1$ und $\overline{3,2} = Y$.

Y und X sollen P das Gleichgewicht halten. Wird zum Kräftepolygon O, 3, 2, 1 das Seilpolygon $abcd$ gezeichnet, so wird, da die Resultierende aller

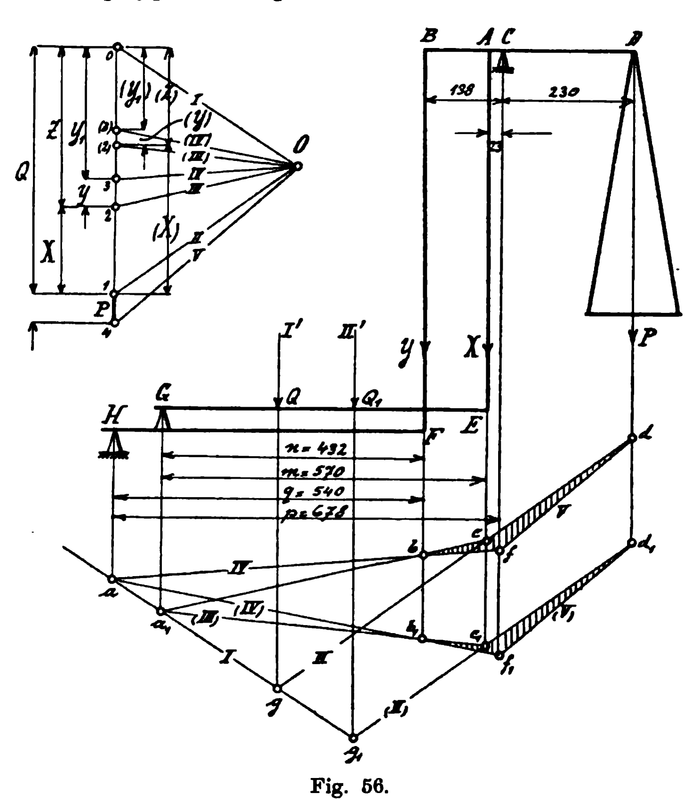


Fig. 56.

Kräfte ihren Angriffspunkt in C haben muß, $\overline{fd}$ die Schlußseite des letzteren. Wird im Kräftepolygon $\overline{O,4} \parallel \overline{fd}$ gezogen, so folgt die Größe von P mit $\overline{1,4}$.

Steht die Last auf der Brücke in II', so wird die Untersuchung wie früher gemacht.

Da nun P sich so groß wie früher ergeben muß, folgt, daß $\overline{c_1 d_1} \# \overline{cd}$ und $\overline{f_1 d_1} \# \overline{fd} \parallel \overline{O,4}$ sein muß.

Nun $\qquad \triangle\, aff_1 \sim \triangle\, abb_1$

$\qquad\qquad \triangle\, a_1 c_1 c \sim \triangle\, a_1 b_1 b$

Hieraus $\left.\begin{array}{l} p : q = \overline{ff_1} : \overline{bb_1} \\ m : n = \overline{cc_1} : \overline{bb_1} \end{array}\right\}$ da $\overline{ff_1} : \overline{bb_1} = \overline{cc_1} : \overline{bb_1}$,

ist auch $p : q = m : n$.

Daher ist $(p - q) : q = (m - n) : n$, d. h.

$$\overline{BC} : \overline{FH} = \overline{AB} : \overline{FG} \text{ oder}$$

$$\overline{BC} : \overline{BA} = \overline{FH} : \overline{FG}$$

$$\overline{BC} : (\overline{BC} - \overline{BA}) = \overline{FH} : (\overline{FH} - \overline{FG}), \text{ somit}$$

$$\overline{BC} : \overline{AC} = \overline{FH} : \overline{GH}.$$

In bezug auf den Drehpunkt C gilt nun

$$P \cdot \overline{CD} = X \cdot \overline{AC} + Y \cdot \overline{BC}$$

$$Q = X + Z$$

$$Z = Q - X$$

Da $Y \cdot \overline{FH} = Z \cdot \overline{GH}$ ist, folgt

$$Y = Z \cdot \frac{\overline{GH}}{\overline{FH}}, \text{ demnach}$$

$$P \cdot \overline{CD} = X \cdot \overline{AC} + Z \cdot \frac{\overline{GH}}{\overline{FH}} \cdot \overline{BC}$$

Daher $P \cdot \overline{CD} = X \cdot \overline{AC} + (Q - X) \cdot \frac{\overline{GH}}{\overline{FH}} \cdot \overline{BC}$

$$P \cdot \overline{CD} = X \left[\overline{AC} - \frac{\overline{GH}}{\overline{FH}} \cdot \overline{BC}\right] + Q \frac{\overline{GH}}{\overline{FH}} \cdot \overline{BC}.$$

Soll der Zug X in der Stange $\overline{AE}$ ohne Einfluß auf die Wägung sein, so muß

$$\overline{AC} - \frac{\overline{GH}}{\overline{FH}} \cdot \overline{BC} = 0 \text{ werden.}$$

D. h. es muß gelten $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{GH}}{\overline{FH}}$

Dann wird $P \cdot \overline{CD} = Q \dfrac{\overline{GH}}{\overline{FH}} \cdot \overline{BC}$ oder

$$P \cdot \overline{CD} = Q \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \overline{BC}, \text{ d. h.}$$

$$P \cdot \overline{CD} = Q \cdot \overline{AC}.$$

Wenn $\overline{CD} = 10 \cdot \overline{AC}$ ist, wird $P = \frac{1}{10} Q$.

§ 19. Die Ritter'sche Methode zur Bestimmuug der Spannungen in Fachwerkträgern.

Ein **Fachwerkträger** ist eine Verbindung von Gelenkstangen-Dreiecken, von denen je zwei benachbarte eine Seite gemein haben und deren Eckpunkte sämtlich in der äußeren Begrenzungslinie liegen, Fig. 57 u. 58.

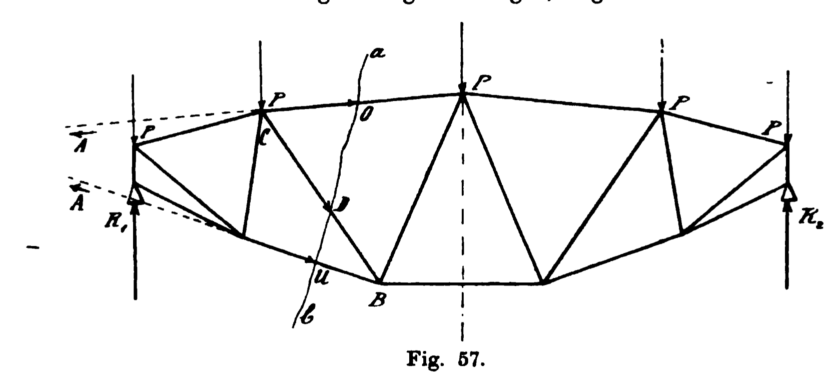


Fig. 57.

Greifen nun äußere Kräfte in den Gelenkpunkten an, so können in den Stäben nur Zug- und Druckspannungen auftreten.

Besteht die Belastung nicht ohne weiteres aus Kräften, die durch die Gelenkpunkte des Fachwerkträgers gehen, so ordnet man über (zwischen) diesen besondere Zwischenbalken an, welche die unmittelbare Belastung aufnehmen und dann auf die Gelenkpunkte übertragen, Fig. 58.

Die Gelenkpunkte heißen auch **Knotenpunkte des Fachwerkes,** die Stäbe, welche das Fachwerk oben und unten begrenzen, **Obergurten** und

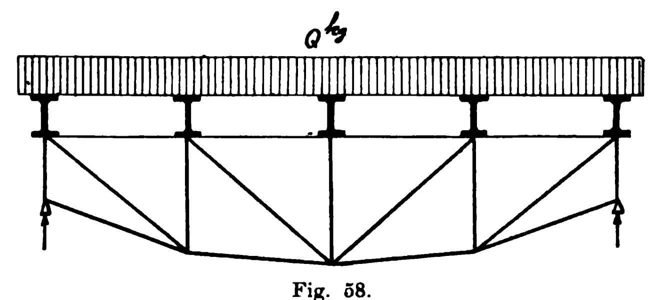


Fig. 58.

Untergurten mit den Spannungen O und U, die zwischen ihnen schief angebrachten Stäbe **Streben oder Diagonalen** mit den Spannungen D.

Behufs Auffindung der einzelnen Stabspannungen zerlegt man das Fachwerk durch einen Schnitt in zwei Teile und bringt an den Schnittstellen der Stäbe die Spannkräfte derselben an. Diese Kräfte werden zur Schnittstelle hin angenommen.

Gleichgewicht ist im linken Trägerteil nun vorhanden, wenn die Summe der Drehmomente aller links vom Schnitte vorhandenen äußeren und der in den Stäben angebrachten Kräfte gleich Null ist. Dabei kann der Drehpunkt irgendwo in der Ebene des Fachwerkes angenommen werden.

Bei Kräften in der Ebene kann man, wie bereits in § 17 gezeigt wurde, drei voneinander unabhängige Gleichungen anschreiben, kann also für einen

Schnitt auch drei Spannkräfte, die nicht durch einen Punkt gehen, daraus berechnen. Die Spannkräfte sind somit statisch bestimmbar.

Zweckmäßig ist es, die Rechnung so einzurichten, daß man für jede unbekannte Spannung nur eine Gleichung bekommt.

Dies wird dadurch erreicht, daß man jedesmal als Drehpunkt den Schnitt derjenigen Stäbe wählt, deren Spannung vorläufig nicht verlangt wird.

Diesen Grundgedanken hat Professor **Ritter** (Aachen) im Jahre 1861 in der Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover erörtert. Nach ihm heißt daher das Verfahren der Bestimmung von Spannungen in Fachwerkträgern das Ritter'sche.

Zur Vervollständigung eben gemachter Erörterung werde noch angeführt, daß positive, bzw. negative Werte der Spannungen Zug-, bzw. Druckkräfte bedeuten.

Behufs Bestimmung von O, D und U werden B, A und C als Drehpunkte gewählt.

Beispiele.

83. Die Spannungen O, H und U in dem in Fig. 59 gezeichneten, einfachen, deutschen Dachstuhl zu finden.

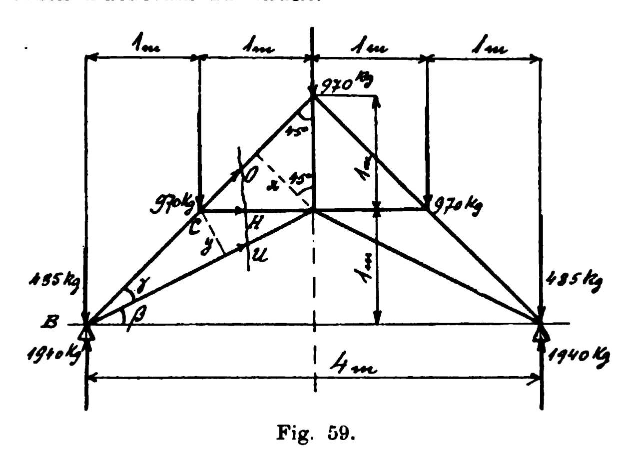


Fig. 59.

Auflösung: Totalbelastung $= 4 \cdot 970 = 3880$ kg.

Demnach Auflagerdruck $R = 1940$ kg.

In bezug auf den Schnittpunkt der Stäbe H und U gilt

$$1455 \cdot 2 - 970 \cdot 1 + O \cdot x = 0$$

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}707$$

$$O = \frac{970 - 2910}{0{,}707}$$

$$\boldsymbol{O = -2750 \text{ kg (Druck)}}$$

In bezug auf den Schnittpunkt der Stäbe O und U wird

$$970 \cdot 1 + H \cdot 1 = 0$$

$$\boldsymbol{H = -970 \text{ kg (Druck)}}$$

In bezug auf den Schnittpunkt der Stäbe O und H ist endlich

$$1455 \cdot 1 - U \cdot y = 0$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2} = 0{,}5, \text{ somit } \beta = 26^0\,30'$$

$$y = 1{,}414 \cdot \sin 18^0\,30' = 0{,}448$$

$$\boldsymbol{U = \frac{1455}{0{,}448} = 3250\ \mathrm{kg\ (Zug)}}$$

84) Die Spannungen O, U und D in dem in Fig. 60 gezeichneten, englischen Dachstuhl zu ermitteln.

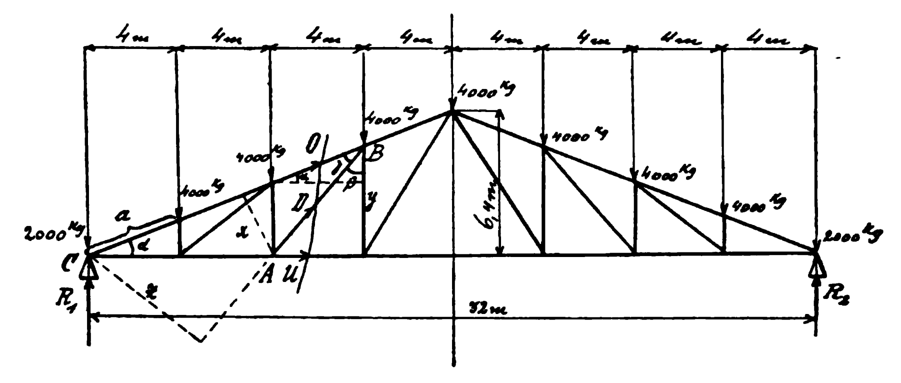


Fig. 60.

Auflösung: Behufs Auffindung von O werde der Drehpunkt im Schnitte von D und U angenommen (A)

$$14000 \cdot 8 - 4000 \cdot 4 + O \cdot x = 0$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{6{,}4}{1{,}6} = 0{,}4;\ \alpha = 21^0\,48';\ x = 8 \cdot \sin 21^0\,48' = 8 \cdot 0{,}372 = 2{,}976$$

$$O = \frac{-112000 + 16000}{2{,}976} = \frac{-96000}{2{,}976}$$

$$\boldsymbol{O = -32300\ \mathrm{kg\ (Druck)}}$$

Zur Bestimmung von U wird der Drehpunkt in B angenommen.

$$14000 \cdot 12 - 4000 \cdot 8 - 4000 \cdot 4 - U_3 \cdot y = 0$$

$$y = 4{,}8 \ldots .\ U = \frac{168000 - 48000}{4{,}8} = \frac{120000}{4{,}8}$$

$$\boldsymbol{U = 25000\ \mathrm{kg\ (Zug)}}$$

Wird C als Drehpunkt gewählt, so läßt sich D bestimmen.

$$4000 \cdot 4 + 4000 \cdot 8 - D \cdot z = 0$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{4}{4{,}8} = \frac{1}{1{,}2} = 0{,}833;\ \beta = 39^0\,45';\ \gamma = 90 - 21^0\,48' - 39^0\,45' = 28^0\,27'$$

$$3\,a = 3\sqrt{16 + 1{,}6^2} = 3\sqrt{18{,}56} = 4{,}3 \cdot 3 = 12{,}9$$

$$z = 12{,}9 \cdot \sin 28^0\,27' = 12{,}9 \cdot 0{,}476 = 6{,}15$$

$$D = \frac{48000}{6{,}15},\ \text{somit}\ \boldsymbol{D = 7800\ \mathrm{kg\ (Zug)}}$$

§ 20. Graphische Ermittlung der Spannungen in Fachwerkträgern nach dem Cremona'schen Verfahren. (Cremona'scher Kräfteplan.)

Schneller als mit der Ritter'schen Methode, aber dafür nicht so genau, kann man die Spannungen in den Stäben eines Fachwerkträgers mittels des Cremona'schen Kräfteplans bestimmen. Dies werde sogleich an Beispielen erklärt.

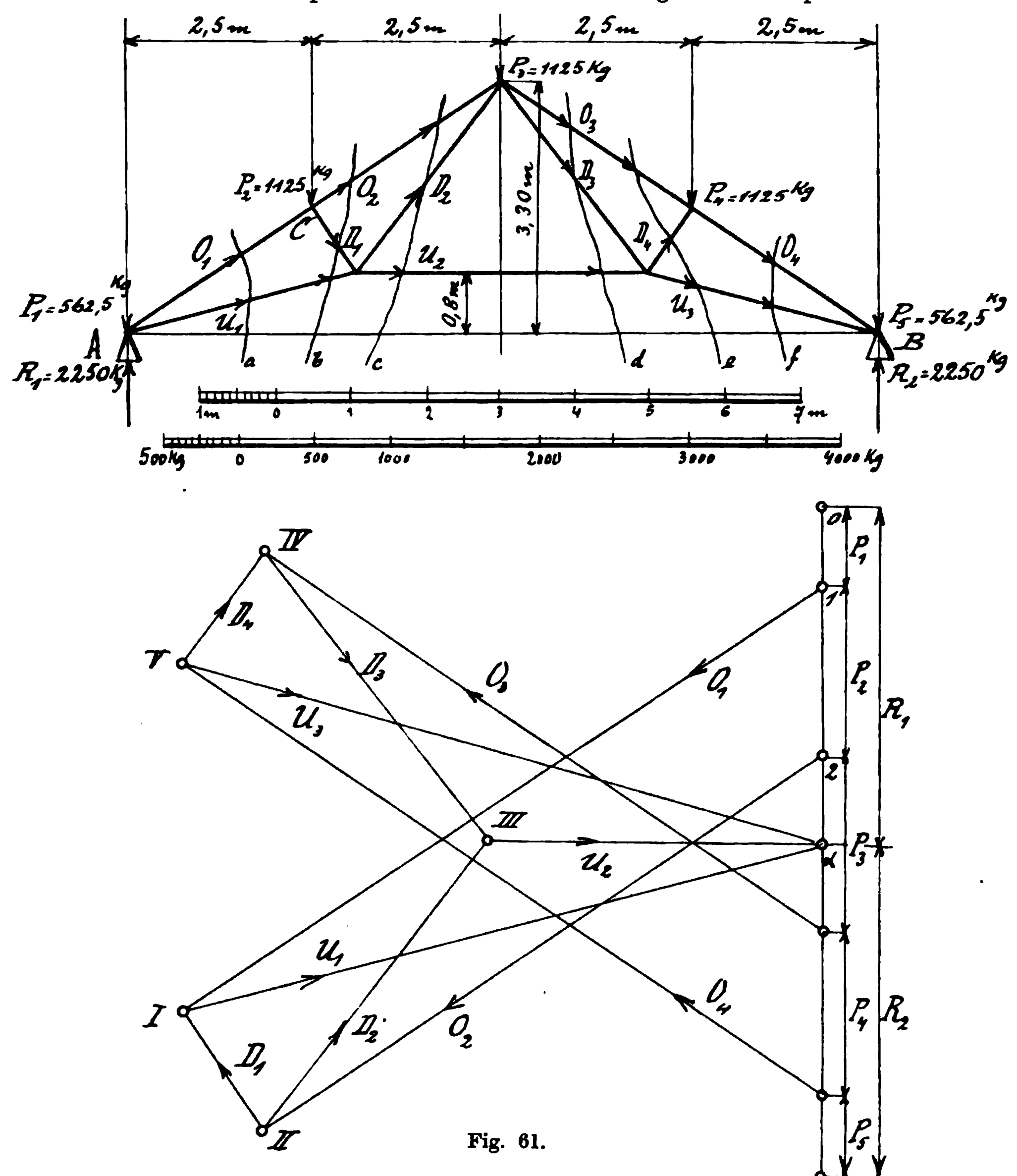
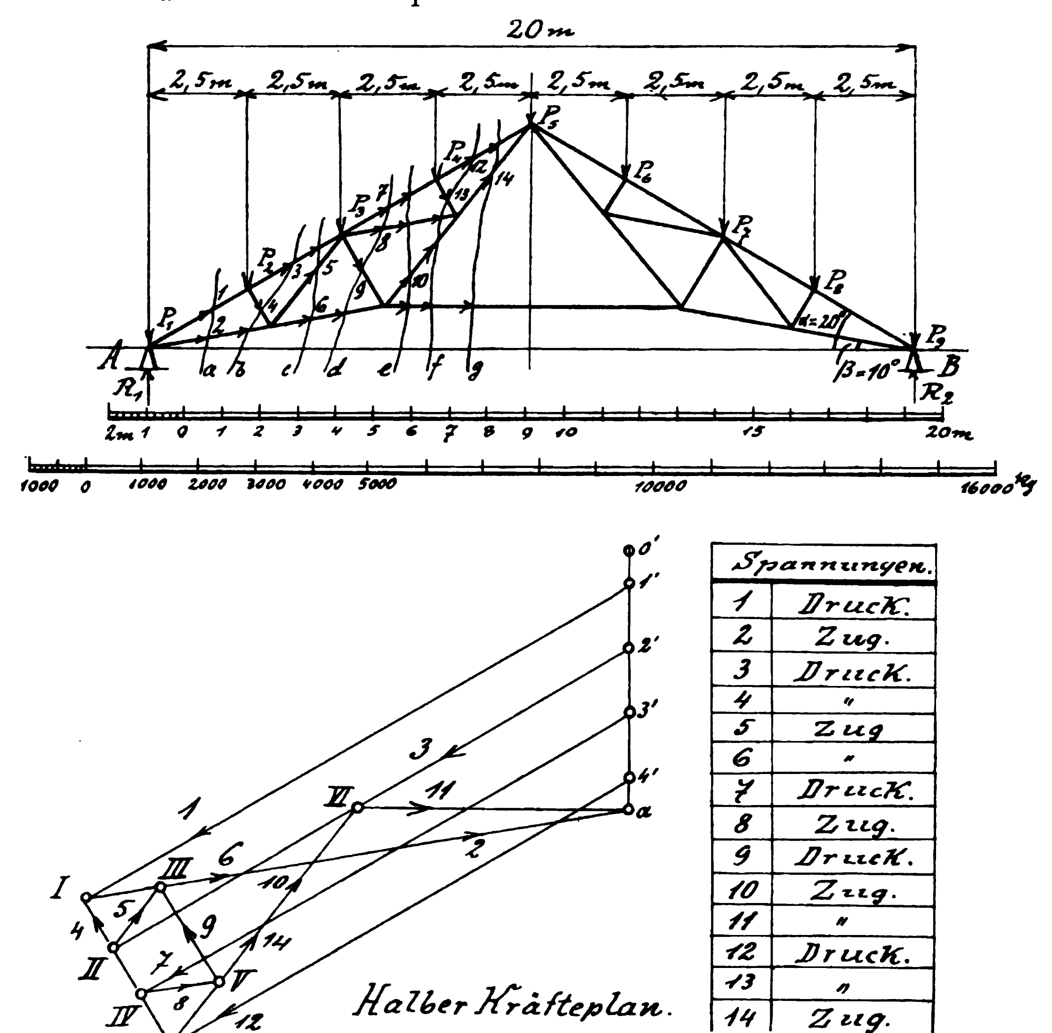


Fig. 61.

Beispiele.

85. Es sind sämtliche Spannungen in den in Fig. 61 gezeichneten, einfachen Polonceauträger zu ermitteln.

Auflösung: Man beginne im ersten Fache am Auflager. Die in A wirkenden Kräfte P_1, R, O_1 und U_1 müssen im Gleichgewichte sein, also einen geschlossenen Kräftezug 0, 1, I, α, 0 bilden. Derselbe wird konstruiert, indem man $P_1 = \overline{0,1}$ und $R_1 = \overline{0,\alpha}$ anträgt, dann durch 1 eine Parallele zu O_1 und durch α eine Parallele zu U_1 zieht. Letztere Parallelen schneiden sich in I.



Spannungen.	
1	Druck.
2	Zug.
3	Druck.
4	"
5	Zug
6	"
7	Druck.
8	Zug.
9	Druck.
10	Zug.
11	"
12	Druck.
13	"
14	Zug.

Fig. 62.

Hierdurch sind die Kräfte O_1 und U_1 bestimmt. Wirken nun die Spannungen von A weg, so sind sie Zugspannungen, im Gegenfalle Druckspannungen. O_1 ergibt sich also als Druck, U_1 als Zug.

Sind derart die Spannungen im ersten Fache gefunden, so nehme man jenes Fach als nächstes, von dessen Knotenpunkte aus höchstens zwei unbekannte Spannungen wirken. In vorliegendem Beispiele ist das Gleichgewicht

für den Punkt C zu bestimmen. Es wird jetzt ein Schnitt b durch das Fachwerk geführt und alles rechts vom Schnitte Befindliche weggedacht. Die neuen, unbekannten Kräfte O_2 und D_1 müssen nun, wenn man sie als hinzugefügte, äußere Kräfte ansieht, mit den links vom Schnitte vorhandenen und mit U_1 im Gleichgewichte sein. Zu diesem Ende wird der Kräftezug 0, 1, 2, II, I, α, 0 verzeichnet, wodurch O_2 und D_1 sich ergeben.

Es ist leicht zu erkennen, daß eine Stabspannung nur einmal im Kräfteplan auftritt.

Wie schon angeführt, ist das Cremona'sche Verfahren als zeichnerisches ungenauer als das Rittersche. Es hat außerdem noch den Nachteil, daß man behufs Ermittlung der Spannungen an einer bestimmten Stelle des Fachwerkes alle anderen Spannungen, von einem Ende desselben aus genommen, aufsuchen muß.

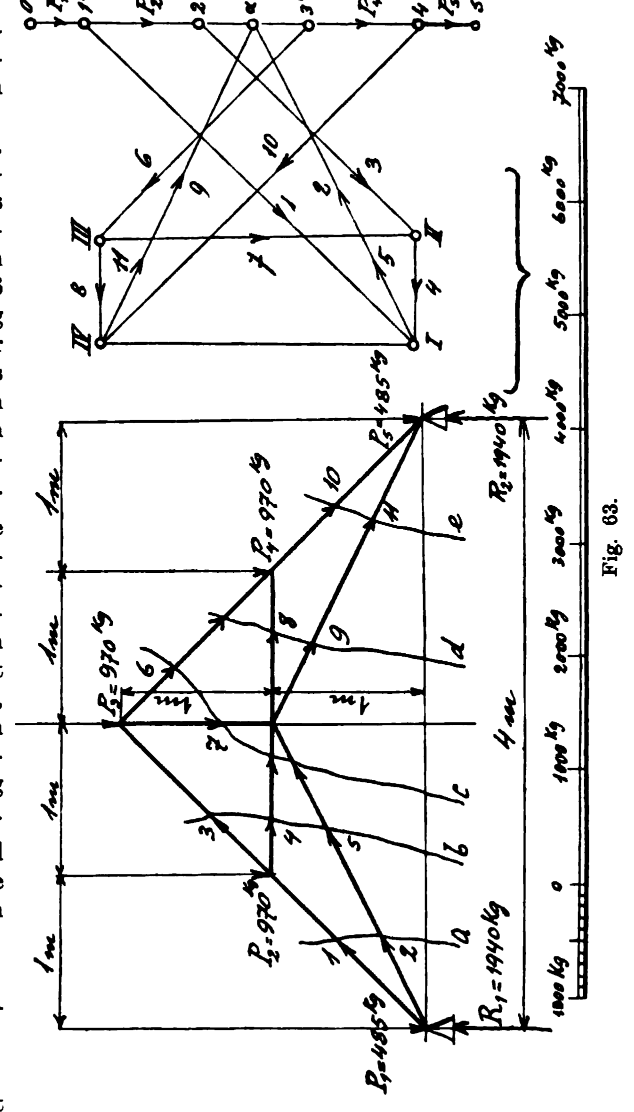


Fig. 63.

86. Es sind die Spannungen in den Stäben des in Fig. 62 gezeichneten Doppel-Polonceauträgers graphisch zu ermitteln. Derselbe ist ein Binder eines Daches, das mit 150 kg pro 1 qm Horizontalprojektion belastet ist. Die Entfernung der Binder beträgt 3 m.

Auflösung: Ein Feld des Daches hat eine Horizontalprojektion im Ausmaße von

$$2{,}5 \cdot 3 = 7{,}5 \text{ qm},$$

empfängt daher eine Belastung von

$$7{,}5 \cdot 150 = 1125 \text{ kg}.$$

Jeder Knotenpunkt hat somit $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1125$ kg Last aufzunehmen; nur die Auflagerstellen sind mit $\frac{1}{2} \cdot 1125 = 562{,}5$ kg beansprucht. R_1 und R_2 ergeben sich mit $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 1125 = 4500$ kg.

Die Spannungen 1 bis 6 werden wie im vorigen Beispiele bestimmt. Behufs Ermittlung der Beanspruchungen 7, 8 und 9 ist ein kleiner Kunstgriff nötig. Derselbe besteht nämlich darin, daß man 7 zwischen $\overline{0',3'}$ und $\overline{I,IV}$ verzeichnet. Die Spannungen 8 und 9 werden hierauf von *IV* und *III* aus auftragen, so daß Punkt *V* sich ergibt, wodurch die Größen von 8 und 9 bestimmt sind. Die Auffindung von 10 bis 14 geschieht wie früher. —

87. Die Aufgabe 83 ist graphisch zu lösen.

Auflösung in Fig. 63.

§ 21. Statisches Moment einer Kraft in bezug auf eine Ebene. Begriff der Momentenachse.

„Unter dem statischen Momente einer Kraft in bezug auf eine Ebene versteht man das Produkt aus der Größe der Kraft und der Größe des Abstandes des Angriffspunktes derselben von dessen Projektion auf die Ebene.“

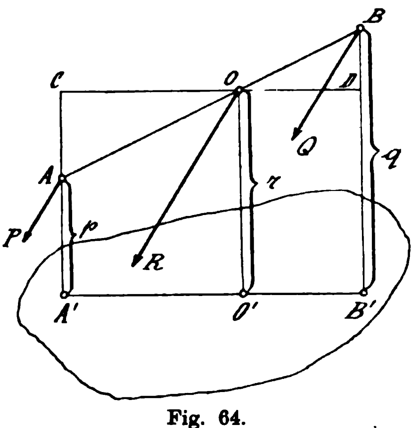


Fig. 64.

„Das Moment der Resultierenden zweier parallelen Kräfte in bezug auf eine Ebene ist gleich der Summe der Momente der Komponenten in bezug auf dieselbe.“

Beweis: Gegeben seien die parallelen Kräfte *P* und *Q*, Fig. 64. — Zunächst werde deren Resultierende *R* gesucht. Dann werde das ganze System auf die Ebene *E* projiziert und seien

$$\overline{AA'} = p, \quad \overline{BB'} = q, \quad \overline{OO'} = r,$$

Wird $\overline{CD}$ parallel zu $\overline{A'B'}$ gezogen, dann folgt

$$\triangle AOC \sim \triangle BOD, \text{ somit}$$

$$\overline{AC} : \overline{BD} = \overline{AO} : \overline{BO}.$$

Auch ist $\qquad Q : P = \overline{AO} : \overline{BO}.$

Daher $\qquad P : Q = \overline{BD} : \overline{AC}.$

Nun $\qquad \overline{BD} = (q - r)$ und $\overline{AC} = (r - p).$

Es wird also $\qquad P : Q = (q - r) : (r - p)$

$$P \cdot r - P \cdot p = Q \cdot q - Q \cdot r$$

$$r(P + Q) = Pp + Qq, \text{ d. h.}$$

$$\mathbf{R \cdot r = P \cdot p + Qq} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(47)}$$

Die Ebene *E* heißt **Momentenebene.**

Liegen die Angriffspunkte der Kräfte in einer Geraden oder in einer zur Momentenebene senkrechten Ebene, so kann man die statischen Momente der Kräfte auch in bezug auf jene Gerade, welche sich als Projektion der Angriffspunkte auf die Ebene ergibt, nehmen. Diese Gerade heißt **Momentenachse.**

Sind mehrere parallele Kräfte vorhanden, so setze man zunächst zwei zu einer Resultierenden zusammen, die Resultierende mit der dritten Kraft,

usw. Heißen die einzelnen parallelen Kräfte $P_1, P_2 \ldots P_n$ und sind die Abstände ihrer Angriffspunkte von der Momentenachse $p_1, p_2 \ldots p_n$, so gelten folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} P_1 p_1 + P_2 p_2 &= R_1 r_1 \\ R_1 r_1 + P_3 p_3 &= R_2 r_2 \\ &\vdots \\ R_{n-1} r_{n-1} + P_n p_n &= R \cdot r \end{aligned}$$

Durch Addition auf beiden Seiten ergibt sich

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots + P_n p_n + R_1 r_1 + \ldots + R_{n-1} r_{n-1}$$
$$= R_1 r_1 + \ldots R_{n-1} r_{n-1} + R \cdot r,$$

oder $P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots + P_n p_u = R \cdot r$, d. h.

$$\boldsymbol{R \cdot r = \Sigma (P \cdot p)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (48)$$

„Die Summe der statischen Momente mehrerer parallelen Einzelnkräfte in bezug auf eine Momentenebene oder eine Momentenachse ist gleich dem statischen Momente der Resultierenden in bezug auf diese Momentenebene oder Momentenachse." —

§ 22. Theorie vom Schwerpunkte.

In den einzelnen Punkten einer materiell gedachten Linie, Fig. 65, wirken deren Gewichte vertikal nach abwärts. Es ist also eine Reihe von parallelen Kräften vorhanden. Dieselben ergeben eine Resultierende, deren Größe nach früherem gleich ist der Summe der Einzelnkräfte, also gleich dem Totalgewichte der materiellen Linie. Ihr Angriffspunkt liegt in einem bestimmten Punkte der Linie $\overline{AB}$ und zwar, wenn dieselbe überall homogen ist, in deren Mittelpunkte. Die Linie $\overline{AB}$ würde also im Gleichgewichte bleiben, wenn man sie in genanntem Angriffspunkte der Resultierenden S festmachen würde.

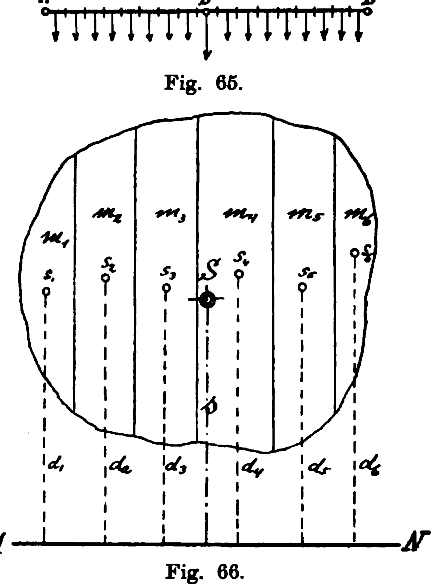


Fig. 65.

Fig. 66.

„Man nennt den Angriffspunkt der Resultierenden aller Gewichte der materiellen Teilchen eines Gebildes den **Schwerpunkt** desselben."

„Jede durch den Schwerpunkt eines Gebildes gehende Gerade heißt **Schwerlinie.** Dieselbe ist oft auch eine Symmetrielinie."

Eine ebene Fläche kann man in unendlich viele schmale Streifchen zerlegen, deren jedes als eine materielle Linie aufzufassen ist, Fig. 66. Jedes derselben besitzt nun einen Mittelpunkt, in welchem deren Gewicht vertikal nach abwärts wirkt. Nun gibt es eine

Totalresultierende aller Teilresultierenden mit einem bestimmten Angriffspunkt. Würde das ebene Gebilde in letzteren unterstützt werden, so wäre es im Gleichgewicht.

Um die Lage des Schwerpunktes einer Fläche zu berechnen, teile man sie also in eine unendlich große Zahl von Streifen ein und beziehe die Momente ihrer Gewichte auf eine Momentenachse, welche irgend eine Gerade sein kann, die mit der Fläche in einer Ebene liegt. Die Summe der statischen Momente aller Teilmassen in bezug auf diese Momentenachse muß dann dem statischen Momente der ganzen Masse in bezug auf sie sein. — Sind die Massenteilchen der Reihe nach m_1, m_2 ... und deren Abstände von der Achse d_1, d_2 ..., so wird

$$m_1 d_1 + m_2 d_2 + \dots + m_n d_n = M \cdot s$$

und hieraus

$$s = \frac{\Sigma(m \cdot d)}{M} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (49)$$

„Die Entfernung des Schwerpunktes von der Momentenachse einer Fläche ist gleich der Summe der statischen Momente aller einzelnen Teilmassen der Fläche in bezug auf diese Achse dividiert durch die Totalmasse der Fläche."

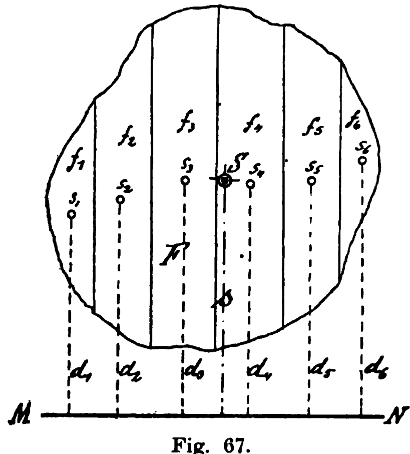


Fig. 67.

Ist die Masse der Flächeneinheit nun δ und die Fläche gleichmäßig mit Masse belegt gedacht, so hat die beliebige Fläche f die Masse $f \cdot \delta$.

Bedeuten nun f_1, f_2 .... die Flächenteilchen eines Gebildes (Fig. 67), so sind die Massen derselben $m_1 = f_1 \delta$, $m_2 = f_2 \delta$ ...

Die Größen der Massen m_1, m_2 .... in die Gleichung der statischen Momente substituiert, folgt

$$f_1 \delta \cdot d_1 + f_2 \cdot \delta \cdot d_2 + \dots = F \cdot \delta \cdot s$$

somit

$$s = \frac{\Sigma(f d)}{F} \quad \dots \quad (50)$$

„Die Entfernung des Schwerpunktes eines ebenen Gebildes von einer Momentenachse ist gleich der Summe der Teilflächenmomente des Gebildes in bezug auf dieselbe dividiert durch dessen Totalfläche."

Dieser Satz soll in folgendem durch einige Beispiele eingeübt werden.

---

§ 23. Bestimmung des Schwerpunktes von Punktsystemen und von materiellen Linien.

88. Zwei Punkte mit den Maßen m_1 und m_2 liegen l Meter voneinander entfernt. Es ist der Schwerpunkt des Punktsystems zu suchen.

Auflösung: Durch Punkt m_1 werde eine Momentenachse senkrecht zur Verbindungslinie von m_1 und m_2 gelegt. Hat nun der Schwerpunkt S von dieser Achse den Abstand x, dann gilt

$$(m_1 + m_2) \cdot x = m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot l$$

$$x = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}$$

89. Wo liegt der Schwerpunkt von Erde und Mond, wenn die Masse der ersteren 80mal so groß ist wie die des letzteren und beide Himmelskörper den Abstand von 60 Erdradien haben?

Auflösung: $$x = \frac{m_2 \cdot l}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 \cdot l}{81 m_2} = \frac{81}{l}$$

$$x = \frac{l}{81}.$$

Der Schwerpunkt liegt in $\frac{1}{81}$ der Entfernung beider Himmelskörper von der Erde aus gerechnet.

90. Der Schwerpunkt eines Systems von drei materiellen Punkten ist aufzusuchen. Fig. 68.

Auflösung: Ist die Momentenachse $m_1 m_2$, dann gilt

$$(m_1 + m_2 + m_3)\, x_3 = m_3 h_3$$

$$x_3 = \frac{m_3}{\Sigma(m)} \cdot h_3$$

$$x_2 = \frac{m_2}{\Sigma(m)} \cdot h_2$$

$$x_1 = \frac{m_1}{\Sigma(m)} \cdot h_1.$$

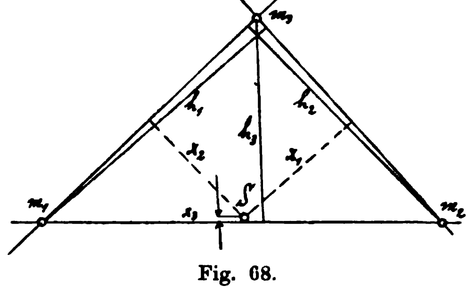


Fig. 68.

91. In dem in Fig. 69 gezeichneten Liniengebilde den Schwerpunktsabstand x zu finden.

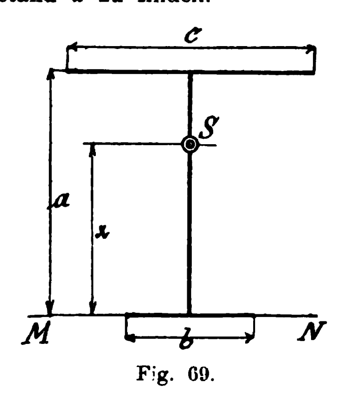


Fig. 69.

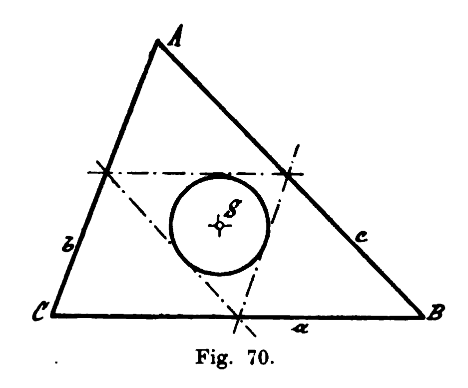


Fig. 70.

Auflösung: $$a \cdot c + \frac{a \cdot a}{2} + b \cdot 0 = (a + b + c) \cdot x$$

$$\frac{a}{2} \cdot (a + 2c) = (a + b + c) \cdot x$$

$$x = \frac{a}{2} \cdot \frac{a + 2c}{a + b + c}$$

92. Der Schwerpunkt eines Dreieckumfanges ist zu suchen. Fig. 70.

Auflösung: Die Mittelpunkte der Dreiecksseiten sind die Schwerpunkte derselben. Daher sind deren Verbindungslinien Schwerlinien. Der Schwer-

punkt des Dreieckumfangs ist demnach der Mittelpunkt des Kreises, welcher dem aus letzteren Schwerlinien gebildeten Dreiecke eingeschrieben ist.

93. Der Schwerpunkt eines Linienzuges, welcher aus den Seiten eines gleichseitigen Dreieckes und aus dessen Höhe gebildet ist, soll gesucht werden. Gegeben die Dreieckseite a. Fig. 71.

Auflösung: Die Schwerpunkte der Schenkel sind um $\frac{h}{2} = \frac{a}{4}\sqrt{3}$ von der Achse $\overline{MN}$ entfernt.

$$a \cdot 0 + 2a \cdot \frac{a}{4}\sqrt{3} + \frac{a}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{a}{4}\sqrt{3} = (3a + \frac{a}{2}\sqrt{3}) \cdot x$$

$$\frac{a}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{8}a = (3 + \frac{1}{2}\sqrt{3}) \cdot x$$

$$x = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{8}a}{3 + \frac{1}{2}\sqrt{3}} = a\,\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{8}}{3 + \frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{a}{4} \cdot \frac{3 + 4\sqrt{3}}{6 + \sqrt{3}}$$

$$x = 0{,}321\,a.$$

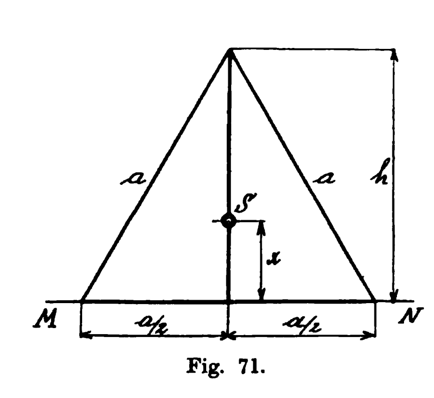


Fig. 71.

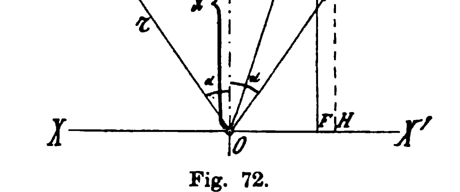


Fig. 72.

94. Es ist der Schwerpunkt eines Kreisbogens ACB, Fig. 72, aufzusuchen.

Auflösung: ACB sei ein gleichmäßig mit Masse belegt gedachter, aus O beschriebener Bogen. Derselbe kann aus lauter unendlich kleinen Elementen DE zusammengesetzt gedacht werden. In bezug auf die Momentenachse $\overline{XX'}$ ist dann das statische Moment von DE gleich $\overline{DE} \cdot \overline{DF}$ (eigentlich $\overline{DE} \cdot \overline{GH}$, aber wegen der Kleinheit von DE kann statt $\overline{GH} \ldots \overline{DF}$ gesetzt werden).

Da $\triangle DEJ \sim \triangle DOF$ ist, wird $\overline{DE} : \overline{EJ} = \overline{OD} : \overline{DF}$, d. h.

$$\overline{DE} \cdot \overline{DF} = \overline{OD} \cdot \overline{EJ}$$

Die Summe der statischen Momente aller Kreisteilchen in bezug auf $\overline{XX'}$ ist

$$\Sigma(\overline{DE} \cdot \overline{DF}) = \Sigma(\overline{OD} \cdot \overline{EJ}) = \overline{OD} \cdot \Sigma(\overline{EJ}) = r \cdot \Sigma(\overline{EJ})$$

$$\Sigma(\overline{EJ}) = \overline{AB} = s$$

Ist der Abstand des Schwerpunktes S von $XX' \ldots x$, dann folgt, wenn der Bogen ACB kurz mit b bezeichnet wird,

$$b \cdot x = r \cdot s \quad \text{oder}$$

$$x = \frac{r \cdot s}{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (51\,a)$$

Ist bloß r und ferner der Winkel α gegeben, dann wird wegen $b = 2 \cdot r \cdot \widehat{\alpha}$ und $s = 2\,r\,\sin\alpha$

$$x = \frac{r \cdot 2r \sin\alpha}{2r \cdot \widehat{\alpha}}$$

$$x = \frac{r \cdot \sin\alpha}{\widehat{\alpha}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (51\,b)$$

Nun $\widehat{\alpha} : \alpha^0 = \pi : 180^0$, daher $\widehat{\alpha} = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha^0$, somit auch

$$x = \frac{180}{\pi} \cdot r \frac{\sin\alpha}{\alpha^0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (51\,c)$$

---

§ 24. Bestimmung des Schwerpunktes von Flächen.

95. Der Schwerpunkt einer Dreiecksfläche ist zu finden.

Auflösung: In Fig. 73 ist die Höhe h in unendlich viele Teile geteilt und durch die Teilpunkte sind Parallele zur Grundlinie $\overline{AC}$ gezogen. Die Dreiecksfläche ist dadurch in lauter homogene Strecken zerlegt. Die Schwerpunkte derselben liegen in deren Mittelpunkten. Der geometrische Ort letzterer ist die Mittellinie $\overline{BF}$. Aus gleichen Gründen sind auch $\overline{AD}$ und $\overline{CE}$ Schwerlinien, so daß sich ergibt:

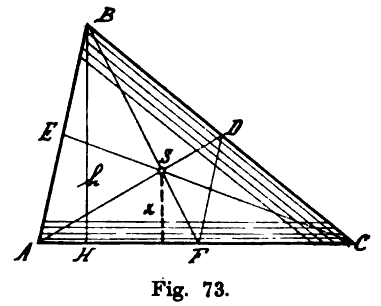


Fig. 73.

„Der Schwerpunkt einer Dreiecksfläche liegt im Schnittpunkte von deren Mittellinien.“

Da $\quad \overline{DF} \parallel \overline{AB}$ ist, folgt

$$\overline{DF} : \overline{AB} = 1 : 2$$

Das Verhältnis $\overline{SF} : \overline{SB}$ ist gleich dem Verhältnis $\overline{DF} : \overline{AB}$, somit wird

$$\overline{SF} : \overline{SB} = 1 : 2$$

$$(\overline{SF} + \overline{SB}) : \overline{SF} = (1 + 2) : 1 \quad \text{oder}$$

$$\mathbf{\overline{SF} : \overline{BF} = 1 : 3.}$$

Ebenso ergeben sich $\quad \overline{SD} : \overline{AD} = 1 : 3$ und

$$\overline{SE} : \overline{CE} = 1 : 3, \quad \text{d. h.:}$$

Der Schwerpunkt hat von der Grundlinie den Abstand

$$x = \frac{h}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (52)$$

96. Die Schwerpunkte der in den Fig. 74a bis 74d gezeichneten Flächen zu bestimmen.

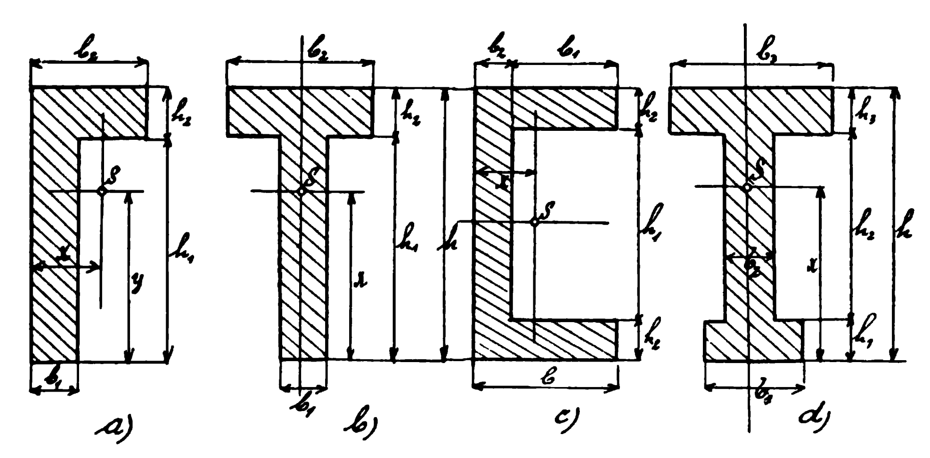


Fig. 74.

Auflösung ad a):

$$h_1 b_1 \cdot \frac{b_1}{2} + b_2 h_2 \cdot \frac{b_2}{2} = (b_1 h_1 + b_2 h_2) \cdot x$$

$$x = \frac{b_1^2 h_1 + b_2^2 h_2}{2\,(b_1 h_1 + b_2 h_2)}$$

$$b_1 h_1 \cdot \frac{h_1}{2} + b_2 h_2 \left(h_1 + \frac{h_2}{2}\right) = (b_1 h_1 + b_2 h_2) \cdot y$$

$$y = \frac{b_1 h_1^2 + b_2 h_2\,(2h_1 + h_2)}{2\,(b_1 h_1 + b_2 h_2)}$$

Auflösung ad b):

$$b_1 h_1 \cdot \frac{h_1}{2} + b_2 h_2 \left(\frac{h_2}{2} + h_1\right) = (b_1 h_1 + b_2 h_2) \cdot x$$

$$x = \frac{b_1 h_1^2 + b_2 h_2\,(2h_1 + h_2)}{2\,(b_1 h_1 + b_2 h_2)}$$

Auflösung ad c):

$$2h_2 b \cdot \frac{b}{2} + h_1 b_2 \frac{b_2}{2} = (h_1 b_2 + 2h_2 b) \cdot x$$

$$x = \frac{2b^2 h_2 + b_2^2 h_1}{2\,(2bh_2 + h_1 b_2)}$$

Auflösung ad d):

$$b_1 h_1 \frac{h_1}{2} + b_2 h_2 \left(\frac{h_2}{2} + h_1\right) + b_3 h_3 \left(h_1 + h_2 + \frac{h_3}{2}\right) = (b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3)\,x$$

$$x = \frac{b_1 h_1^2 + b_2 h_2\,(2h_1 + h_2) + b_3 h_3\,(2h_1 + 2h_2 + h_3)}{2\,(b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3)}$$

97. Schwerpunkt eines Trapezes.

a) Auflösung auf dem Wege der Rechnung. Fig. 75.

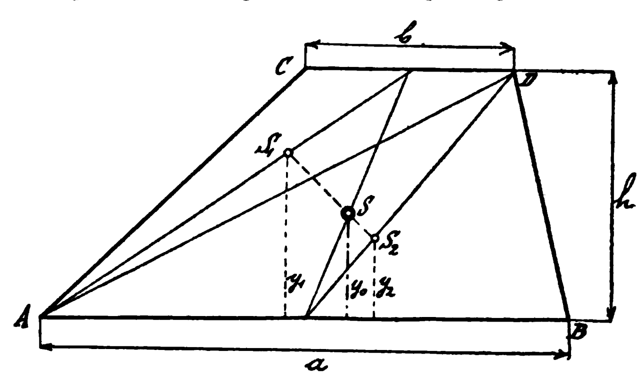


Fig. 75.

$$F \cdot y_0 = F_1 y_1 + F_2 y_2$$

$$h \cdot \frac{a+b}{2} \cdot y_0 = \frac{bh}{2} \cdot \frac{2}{3} h + \frac{ah}{2} \cdot \frac{h}{3}$$

$$(a+b) \cdot y_0 = \frac{h}{3}(a+2b)$$

$$y_0 = \frac{h}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (53)$$

b) Auflösung auf konstruktivem Wege. Fig. 76.

Man mache $\overline{BH} = \overline{AJ} = b$ und $\overline{CK} = \overline{DG} = a$. — Dann ziehe man

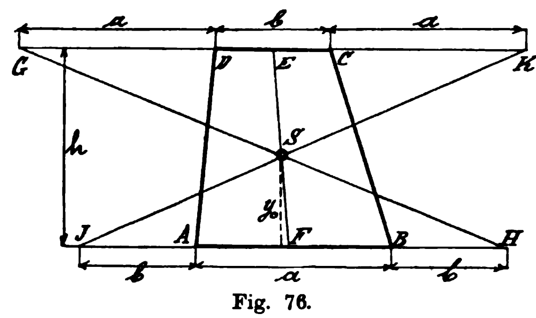


Fig. 76.

$\overline{HG}$ und $\overline{JK}$, so ist der Schnittpunkt letzterer Linien der gesuchte Schwerpunkt.

Beweis:

$$\triangle SEG \sim \triangle SFH$$

$$\overline{SF} : \overline{SE} = \overline{FH} : \overline{EG}$$

$$\overline{SF} : \overline{SE} = \left(\frac{a}{2} + b\right) : \left(\frac{b}{2} + a\right)$$

$$\overline{SF} : \overline{SE} = (a+2b) : (b+2a)$$

$$\overline{SF} : (\overline{SE} + \overline{SF}) = (a+2b) : (3a+3b)$$

$$y_0 : h = (a+2b) : 3(a+b)$$

$$y_0 = \frac{h}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b}, \text{ was zu beweisen war.}$$

c) Verfahren von G. Lang und R. Land. (S. Riga'sche Industriezeitung, Jahrgang 1883, Seite 26.) — Fig. 77.

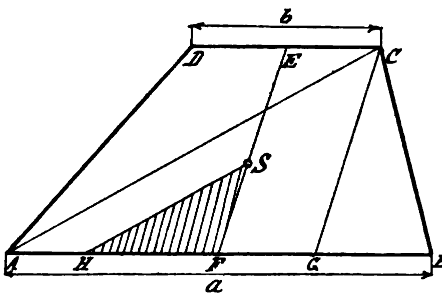


Fig. 77.

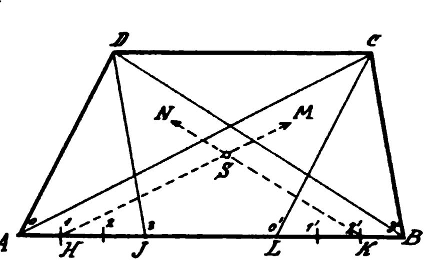


Fig. 78.

Angenommen, S sei der Schwerpunkt. Dann ist nach Vorigem

$$\overline{SF} : \overline{FE} = (2b + a) : (3a + 3b)$$

Wenn nun $\overline{HS} \parallel \overline{AC}$ und $\overline{CG} \parallel \overline{EF}$ sind, wird

$$\triangle HSF \sim \triangle ACG, \text{ daher}$$

$$\overline{HF} : \overline{AG} = \overline{SF} : CG = SF : EF$$

$$\overline{HF} : AG = (2b + a) : (3a + 3b)$$

Nun ist aber $\overline{AG} = \frac{a+b}{2}$, folglich

$$\overline{HF} = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{2b+a}{3(a+b)} = \frac{2b+a}{6} = \frac{b}{3} + \frac{a}{6} = \frac{b}{3} + \frac{a}{2} - \frac{a}{3}$$

$$HF = \frac{a}{2} - \frac{a-b}{3}$$

Da $\overline{AF} = \frac{a}{2}$ ist, ergibt sich

$$\overline{AH} = \frac{a-b}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (54)$$

Auf Grund dieses Resultates kann man den Schwerpunkt folgendermaßen konstruieren. Fig. 78.

Man mache $\overline{DJ} \parallel \overline{CB}$, dann ist $\overline{AJ} = (a - b)$. Hierauf wird $\overline{AH} = \frac{1}{3} \overline{AJ}$ gesucht und HM parallel zu $\overline{AC}$ gezogen.

Ebenso mache man

$$CL \parallel AD, \; BK = \frac{1}{3} BL$$

und ziehe man $KN \parallel BD$.

Der gesuchte Schwerpunkt liegt dann im Schnittpunkte von HM u. $\overline{KN}$

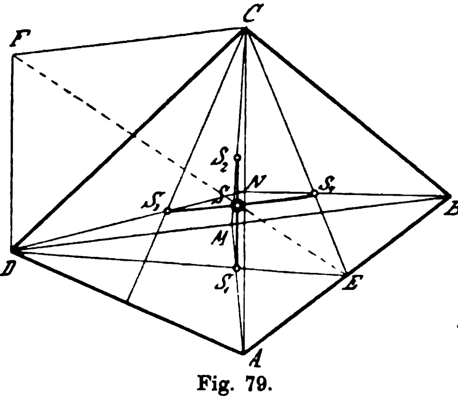


Fig. 79.

98. Schwerpunkt eines Trapezoides (nach R. Land). Fig. 79.

Auflösung: Man ziehe die Diagonale $\overline{BD}$ und halbiere sie, d. h. man mache

$$\overline{MD} = \overline{MB}.$$

$$\left.\begin{aligned} \text{Dann ist} \quad \overline{MS_1} &= \frac{1}{3}\,\overline{MA} \\ \text{und} \quad \overline{MS_2} &= \frac{1}{3}\,\overline{MC} \end{aligned}\right\} \text{somit}$$

$$\overline{S_1 S_2} \parallel \overline{AC}.$$

In $\overline{S_1 S_2}$ muß der Schwerpunkt liegen. Ebenso wird auch die $\overline{AC}$ halbiert. Es werden hierauf die Schwerpunkte S_3 und S_4 der Dreiecke ACD und ABC gesucht. Dann ist analog wie früher

$$\left.\begin{aligned} \overline{NS_3} &= \frac{1}{3}\,\overline{ND} \\ \text{und} \quad \overline{NS_4} &= \frac{1}{3}\,\overline{NB} \end{aligned}\right\} \text{folglich}$$

$$\overline{S_3 S_4} \parallel \overline{DB}.$$

Im Schnitte von $\overline{S_1 S_2}$ und $\overline{S_3 S_4}$ liegt der gesuchte Schwerpunkt S. — Werden $\overline{DE}$ und $\overline{CE}$ eingezeichnet und $\overline{CF} \parallel \overline{DB}$ und $\overline{DF} \parallel \overline{AC}$ gezogen, so ergibt sich

$$\overline{S_1 S_2} \parallel \overline{DF}$$

$$\text{und } \overline{S_3 S_4} \parallel \overline{CF}$$

Nun gilt die Beziehung $\overline{ES_4} : \overline{EC} = \overline{ES_1} : \overline{ED}$, daher ist

$$\text{Fläche } ES_1SS_4 \sim \text{Fläche } EDFC,$$

somit ist die Linie ESF eine Gerade und wird

$$\overline{ES} = \frac{1}{3}\,\overline{EF} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (55)$$

Um nun den Schwerpunkt zu konstruieren (Fig 80), ziehe man zunächst die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ und mache $\overline{CF} \parallel \overline{DB}$ und $\overline{DF} \parallel \overline{AC}$. — Der Schwerpunkt liegt dann im ersten Drittel von $\overline{EF}$.

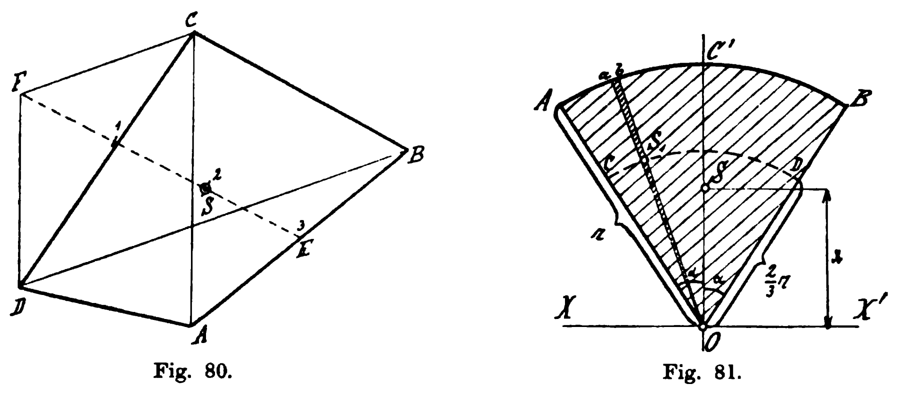


Fig. 80. Fig. 81.

99. Man suche den Schwerpunkt eines Kreissektors (Kreisausschnittes), Fig. 81.

Auflösung: Wird aus dem Ausschnitte das unendlich kleine Dreieck Oab herausgegriffen, so liegt dessen Schwerpunkt S_1 in der Entfernung $\frac{2}{3}\,r$ von O. — Der Kreis CD mit dem Radius $\frac{2}{3}r$ ist also eine Schwerlinie des Ausschnittes. Sein Schwerpunkt ist demnach derjenige desselben.

Somit gilt unter Verwendung der Gleichung (51c)

$$x = \frac{2}{3}\cdot\frac{180}{\pi}\cdot r\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha^0} \quad (56)$$

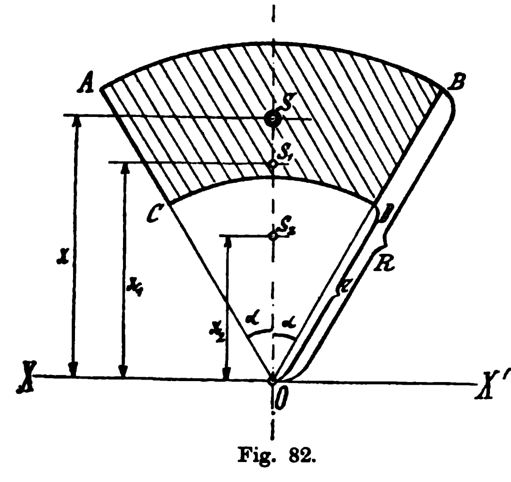


Fig. 82.

100. Der Schwerpunkt eines Kreisringstückes, Fig. 82, ist zu suchen.

Auflösung: Das statische Moment des Kreisringstückes ist gleich demjenigen des Sektors OAB minus dem des Sektors OCD.

Demnach gilt

$$ABCD\cdot x = OAB\cdot x_1 - OCD\cdot x_2$$

$$x = \frac{\frac{1}{2}\cdot 2R\cdot\widehat{\alpha}\cdot R\cdot x_1 - \frac{1}{2}\cdot 2r\alpha\cdot r\cdot x_2}{\frac{1}{2}\cdot 2R\cdot\widehat{\alpha}\cdot R - \frac{1}{2}\cdot 2r\cdot\widehat{\ }\cdot r}$$

$$x = \frac{R^2\cdot x_1 - r^2\cdot x_2}{R^2 - r^2}$$

$$x = \frac{R^2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{180}{\pi}\cdot R\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha^0} - r^2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{180}{\pi}\cdot r\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha^0}}{R^2 - r^2}$$

$$x = \frac{2}{3}\cdot\frac{180}{\pi}\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha^0}\cdot\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (57)$$

101. Zu suchen der Abstand des Schwerpunktes
 a) einer Halbkreisfläche,
 b) einer Viertelkreisfläche,
 c) einer Sechstelkreisfläche

vom Mittelpunkt.

Auflösung: ad a) $x = \frac{2}{3}\cdot\frac{180}{\pi}\cdot r\cdot\frac{\sin 90}{90} = \frac{2}{3}\cdot\frac{180}{\pi}\cdot r\,\frac{1}{90}$

$$x = \frac{4}{3}\cdot\frac{r}{\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (58)$$

ad b) $$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot r \cdot \frac{\sin 45}{45} = \frac{2}{3} \cdot \frac{180}{\pi}\, r\, \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 45}$$

$$x = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{r}{\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (59)$$

ad c) $$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{180}{\pi}\, r\, \frac{\sin 30}{30} = \frac{2}{3} \cdot \frac{180}{\pi}\, r\, \frac{1}{2 \cdot 30}$$

$$x = 2 \cdot \frac{r}{\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (60)$$

102. Der Abstand des Schwerpunktes eines Kreissegmentes (Kreisabschnittes) von seinem Mittelpunkte ist zu suchen. Fig. 83.

$$x = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2\,\overset{\frown}{r} \cdot r \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{180}{\pi}\, r\, \frac{\sin\alpha}{\alpha^0} - \frac{1}{2} \cdot 2\, r \sin\alpha \cdot r \cos\alpha\, \frac{2\, r \cos\alpha}{3}}{\frac{1}{2} \cdot 2\,\overset{\frown}{r} \cdot r - \frac{1}{2} \cdot 2\, r \sin\alpha \cdot r \cdot \cos\alpha}$$

$$x = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha^0} \cdot r^3 \cdot \widehat{\alpha} - \frac{2}{3}\, r^3 \cdot \sin\alpha \cos^2\alpha}{r^2 \cdot \widehat{\alpha} - r^2 \cdot \sin\alpha \cos\alpha}$$

$$x = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha^0}\, r^3 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \alpha^0 - \frac{2}{3} \cdot \sin\alpha \cos^2\alpha}{r^2 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \alpha^0 - r^2 \sin\alpha \cos\alpha}$$

$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{r \sin\alpha - r \sin\alpha \cos^2\alpha}{\frac{\pi}{180}\, \alpha^0 - \sin\alpha \cos\alpha}$$

$$x = \frac{2}{3} \cdot r\, \frac{\sin\alpha - \sin\alpha\,(1 - \cos^2\alpha)}{\frac{\pi}{180}\, \alpha^0 - \sin\alpha \cos\alpha}$$

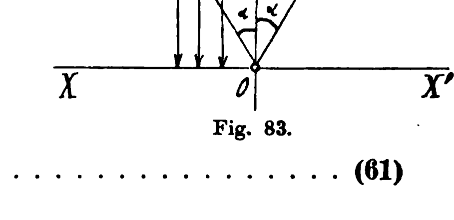


Fig. 83.

$$x = \frac{2}{3}\, r\, \frac{\sin^3\alpha}{\frac{\alpha^0 \cdot \pi}{180} - \sin\alpha \cos\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (61)$$

103. Wo liegt der Schwerpunkt der in Fig. 84 gezeichneten Fläche?

Auflösung:

$$x = \frac{bh\,\frac{h}{2} - \frac{r^2\pi}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi}}{bh - \frac{\pi r^2}{2}}$$

$$x = \frac{3\, bh^2 - 4\, r^3}{6\, bh - 3\pi r^2}$$

$$x = \frac{3\, bh^2 - 4\, r^3}{3\,(2\, bh - \pi r^2)}.$$

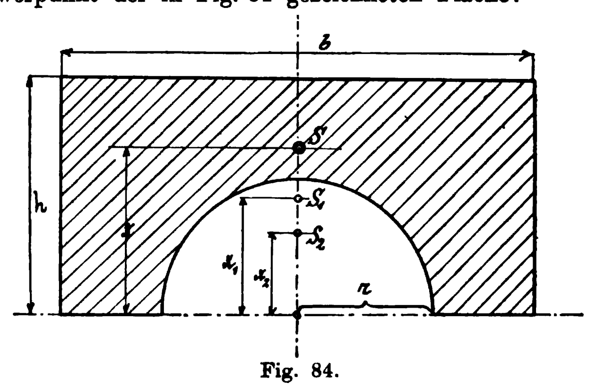


Fig. 84.

104. Eine Fläche besteht aus einem gleichschenkligen Dreiecke und einem Halbkreis, dessen Durchmesser gleich ist der Basis des Dreieckes. — Wo muß der Schwerpunkt des letzteren liegen, damit derjenige der ganzen Fläche in den Mittelpunkt des Halbkreises falle? Fig. 85.

Auflösung: Soll O der Schwerpunkt der Fläche sein, dann muß die Summe der statischen Momente von Dreieck und Halbkreis in bezug auf die

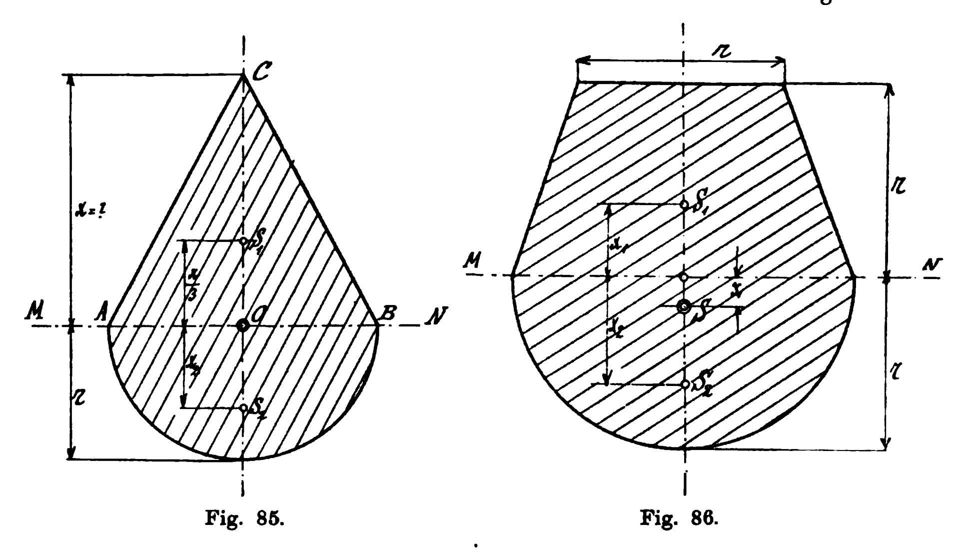


Fig. 85. Fig. 86.

Achse $\overline{MN}$ gleich Null werden oder das statische Moment des Dreieckes muß gleich demjenigen des Halbkreises sein, also

$$2r\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}=\frac{r^2\cdot\pi}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{r}{\pi}$$

$$r\,x^2=2\,r^3$$

$$x=r\sqrt{2}.$$

105. Wo liegt der Schwerpunkt einer Fläche, welche aus einem Halbkreis und einem gleichschenkligen Trapeze mit den Parallelseiten $2r$ und r und der Höhe r zusammengesetzt ist? Fig. 86.

$$x=\frac{\frac{r}{3}\cdot\frac{2r+2r}{2r+r}\cdot\frac{2r+r}{2}\cdot r-\frac{r^2\pi}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{r}{\pi}}{\frac{2r+r}{2}\cdot r+\frac{r^2\pi}{2}}=\frac{\frac{2r^3}{3}-\frac{2r^3}{3}}{\frac{3r^2}{2}+\frac{\pi r^2}{2}}$$

$$x=0.$$

§ 25. Graphische Ermittlung des Schwerpunktes ebener Flächen.

Dem exakten Zeichner wird es durch folgende Methode ermöglicht, den Schwerpunkt beliebiger Figuren graphisch zu ermitteln.

Man zerlege die gegebene Fläche in Teile, deren Schwerpunkte bekannt sind, Fig. 87. In letzterer denke man sich die Gewichte der Teilflächen vertikal nach abwärts wirken. Die Resultierende dieser Gewichte greift nun im Schwerpunkte der gegebenen Fläche an.

Hat die Fläche eine Symmetrieachse, so ergibt sich ihr Schwerpunkt als Schnitt der nach obigem Verfahren gesuchten Resultierenden mit dieser Symmetrieachse. Wenn dies nicht der Fall ist, muß eine zweite Schwerpunktsachse gefunden werden.

An nachstehenden Beispielen soll die soeben beschriebene graphische Methode näher erläutert werden.

Beispiele.

106. Es ist der Schwerpunkt der in Fig. 87 gegebenen Fläche zu suchen. —

Auflösung: Unter der Voraussetzung, daß die gegebene Fläche gleichmäßig mit Masse belegt ist, kann man statt der Resultierenden der Teilgewichte

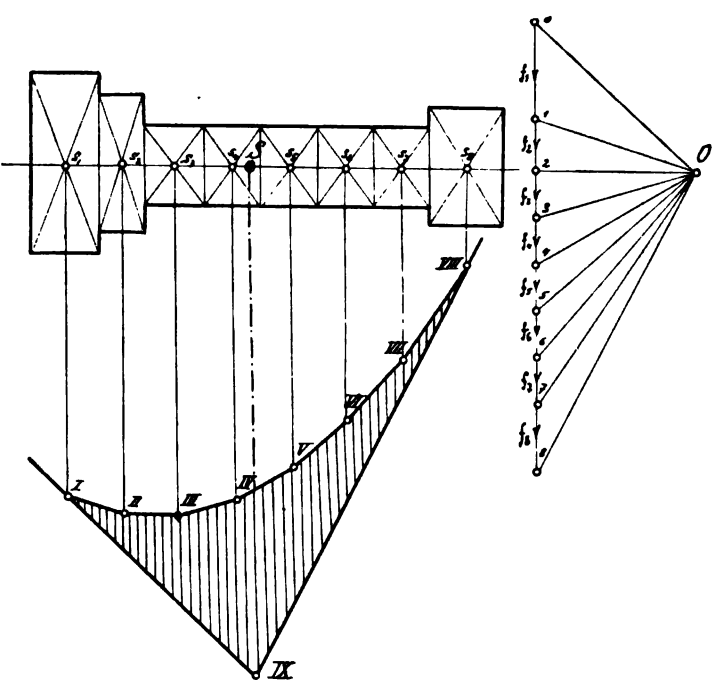


Fig. 87.

auch die der Teilflächen suchen. Man trage f_1 bis f_8 an, nehme den Pol O beliebig und verzeichne Kräfte- und Seilpolygon. Der Schnittpunkt der äußersten Seiten des letzteren ergibt den Angriffspunkt der Resultierenden aller Teilgewichte. Die Resultierende selbst schneidet die Symmetrieachse dann im gesuchten Schwerpunkte S.

107. Der Schwerpunkt des in Fig. 88 gezeichneten, unregelmäßigen Polygons ist graphisch zu finden.

Auflösung: Das Polygon werde in Dreiecke mit der gemeinsamen Spitze d zerlegt. Ist die Masse über das Polygon gleichmäßig verteilt, so sind die Dreiecksflächen den Dreiecksmassen proportional, und man kann daher im Schwerpunkte der ersteren die letzteren vertikal nach abwärts wirkend denken. Die Resultierende der Massenkräfte enthält den gesuchten Schwerpunkt S.

Folgendes Verfahren erlaubt nun, die Flächen der einzelnen Dreiecke als Linien in der Richtung $\overline{ah}$ untereinander aufzutragen.

Man verlängere gf und ziehe $ep \parallel df$. Dann folgt

$$\triangle\, dfe = \triangle\, dfp$$

Da die Dreiecke dfg und dfp gleiche Höhen haben, verhält sich

$$\triangle\, dfg : \triangle\, dfe\,[\triangle\, dfp] = \overline{fg} : \overline{fp} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

Verlängert man ferner gh und zeichnet $nf \parallel dg$, dann ergibt sich

$$\triangle\, dfg = dgn,$$

und weil die Dreiecke dhg und dgn wieder gleiche Höhe haben, wird

$$\triangle\, dhg : \triangle\, dfg\,[\triangle\, dgn] = \overline{hg} : \overline{gn} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

Wenn $\overline{po} \parallel fn$ ist, folgt $fg : \overline{fp} = gn : \overline{no}$, somit

laut Gleichung α) .... $\triangle\, dfg : \triangle\, dfe = \overline{gn} : \overline{no}$ .... (γ)

laut Gleichung β) .... $\triangle\, dfg : \triangle\, dhg = gn : \overline{hg}$, also

$$\triangle\, dhg : \triangle\, dfe = \overline{hg} : \overline{no} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\delta)$$

Nach Kombination von β) und δ) läßt sich schreiben

$$\triangle\, dhg : \triangle\, dfg : \triangle\, dfe = hg : \overline{gn} : \overline{no} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\varepsilon)$$

Wenn nun $\overline{gk} \parallel dh$ und $\overline{nl} \parallel \overline{om} \parallel dh$ sind, kann letzte Gleichung auch in der Form

$$\triangle\, dhg : dfg : \triangle\, dfe = \overline{hk} : \overline{kl} : \overline{lm} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\eta)$$

ausgedrückt werden.

Da $\triangle\, dhg = \triangle\, dhk$ ist und $\triangle\, dah : \triangle\, dhk = \overline{ah} : \overline{hk}$ verhält, wird

$$\ldots\ldots \triangle\, dah : \triangle\, dhg\,[\triangle\, dhk] : \triangle\, dfg : \triangle\, dfe = \overline{ah} : \overline{hk} : \overline{kl} : \overline{lm} \quad \ldots (\iota)$$

Reduziert man ebenso die Dreiecke dab und dbc auf die Richtung $\overline{ah}$, so ist allgemein

$$\triangle\, \mathbf{dbc} : \triangle\, \mathbf{dba} : \triangle\, \mathbf{dah} : \triangle\, \mathbf{dgh} : \triangle\, \mathbf{dfg} : \triangle\, \mathbf{dfe} = \overline{\mathbf{st}} : \overline{\mathbf{ta}} : \overline{\mathbf{ah}} : \overline{\mathbf{hk}} : \overline{\mathbf{kl}} : \overline{\mathbf{lm}}$$

Jetzt betrachte man die rechten Glieder der letzten Gleichung als Maße der Teilmassen und nehme man die Schwerpunktsbestimmung laut Fig. 88 vor.

§ 26. Experimentelle Bestimmung des Schwerpunkts.

Für viele Fälle der Praxis genügt es, den Schwerpunkt annähernd auszumitteln. —

Ist z. B. derselbe in einer ebenen Figur zu bestimmen, so hänge man

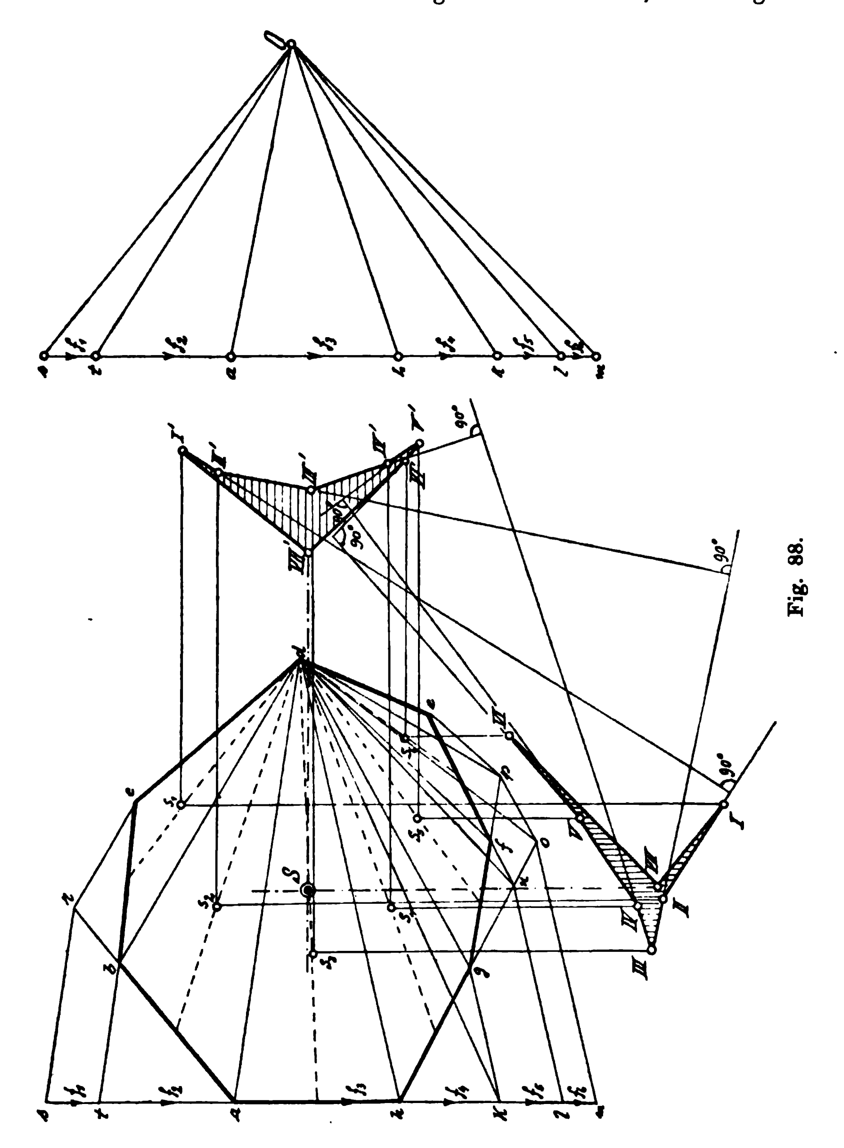


Fig. 88.

letztere an einem dünnen Faden auf und reiße in ihr die Verlängerung seiner Richtung auf. Diese Linie ist eine Schwerlinie der Figur. Wird auf gleiche Art eine andre Schwerlinie bestimmt, so ergibt sich der Schwerpunkt als Schnitt der gefundenen Schwerlinien.

Statt die Figur an einem Faden aufzuhängen, kann man sie auf eine scharfe Schneide auflegen und derart ihre Schwerlinie finden (durch Ausbalanzieren).

Freilich ist von den Resultaten dieser Methode kein hoher Genauigkeitsgrad zu verlangen.

§ 27. Guldinsche Regel zur Bestimmung der Oberfläche und des Inhaltes von Rotationskörpern.

Dreht sich der Bogen $AB = b$ um die Achse $\overline{XX'}$, so daß seine einzelnen Punkte von derselben immer konstanten Abstand behalten, dann entsteht ein Rotationskörper, Fig. 89.

a) Bestimmung der Oberfläche.

Die Oberfläche des durch die Rotation des Bogenstückchens $\overline{ab}$, welches

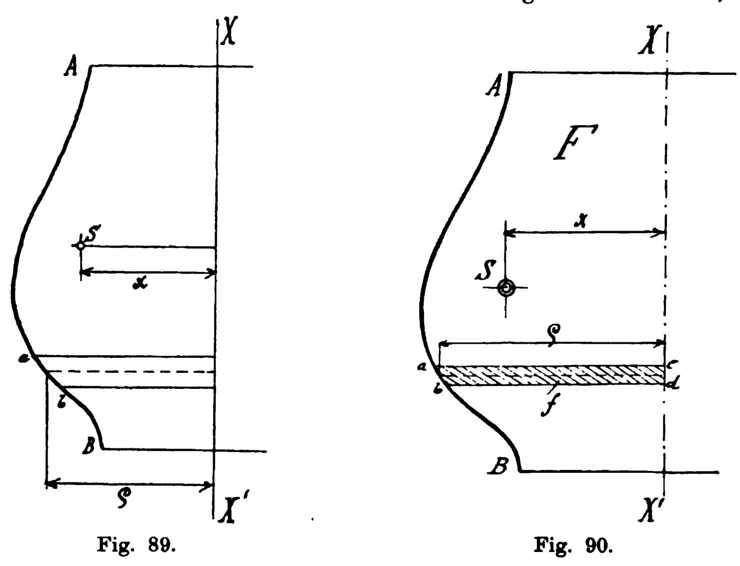


Fig. 89. Fig. 90.

parallel zur Achse $\overline{XX'}$ gedacht werden kann (weil es unendlich klein ist), entstehenden Zylinders ist

$$2\varrho\pi \cdot \overline{ab}.$$

Der Inhalt der bei der Rotation des ganzen Bogens $AB = b$ erzeugten Flächen ist daher

$$O = \Sigma(2\varrho\pi \cdot \overline{ab}) = 2\pi \cdot \Sigma(\overline{ab} \cdot \varrho)$$

$\overline{ab} \cdot \varrho$ ist ein statisches Moment. Nach dem Satze von den statischen Momenten (48) ergibt sich dann

$$\Sigma(\overline{ab} \cdot \varrho) = b \cdot x.$$

Demnach wird

$$O = b \cdot 2\pi x \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (62)$$

„Die Oberfläche eines Rotationskörpers wird gefunden, wenn man die Länge des rotierenden Bogens mit dem Wege seines Schwerpunktes multipliziert.“

b) Bestimmung des Inhaltes.

Der Inhalt des unendlich kleinen Zylinders, welcher durch die Rotation des unendlich schmalen Flächenstreifens $f = abcd$ entsteht, Fig. 90, ist

$$\varrho^2 \cdot \pi \cdot \overline{ab}.$$

Daher ist der Inhalt des ganzen Umdrehungskörpers

$$V = \Sigma(\varrho^2 \cdot \pi \cdot \overline{ab}) = 2\pi \cdot \Sigma\left(\overline{ab} \cdot \varrho \cdot \frac{\varrho}{2}\right) = 2\pi \cdot \Sigma\left(f \cdot \frac{\varrho}{2}\right).$$

$f \cdot \frac{\varrho}{2}$ ist das statische Moment des unendlich schmalen Flächenstreifens f.

Demnach wird $\Sigma\left(f \cdot \frac{\varrho}{2}\right) = F \cdot x.$

Das Volumen des Umdrehungskörpers bestimmt sich sodann mit

$$\boldsymbol{V = F \cdot 2\pi x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (63)$$

„Der Inhalt des Rotationskörpers, welcher durch Rotation einer ebenen Fläche um eine in ihrer Ebene liegende Achse erzeugt wird, ist gleich dem Produkte aus dem Inhalte der Fläche und dem Wege ihres Schwerpunktes."

Beispiele.

108. Es sind Mantelfläche und Inhalt eines Kreiskegels zu finden.

Auflösung: Der Kegel entsteht durch Rotation eines rechtwinkligen Dreieckes mit den Katheten r und h um die letztere.

$$M = b \cdot 2\pi x = s \cdot 2\pi \cdot \frac{r}{2},$$

wenn s die Seite (Erzeugende) des Kegels bedeutet.

$$\boldsymbol{M = \pi r s}$$

$$V = \frac{rh}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{r}{2}$$

$$\boldsymbol{V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3}}$$

109. Es ist der Inhalt eines Kegelstumpfes zu bestimmen. Radien der Grundflächen sind R und r, die Höhe ist h. Fig. 91.

Auflösung:

$$V = F \cdot 2\pi x$$

$$\frac{R+r}{2} \cdot h \cdot x = \frac{rh}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} r + \frac{Rh}{2}\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{R}{2} + \frac{1}{3} r\right)$$

$$x = \frac{\frac{1}{3} r^2 + \frac{1}{3} R^2 + \frac{1}{3} Rr}{R + r}$$

$$x = \frac{R^2 + Rr + r^2}{3(R + r)}$$

$$V = \frac{R+r}{2} h \cdot 2\pi \cdot \frac{R^2 + Rr + r^2}{3(R+r)}$$

$$\boldsymbol{V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r_2)}$$

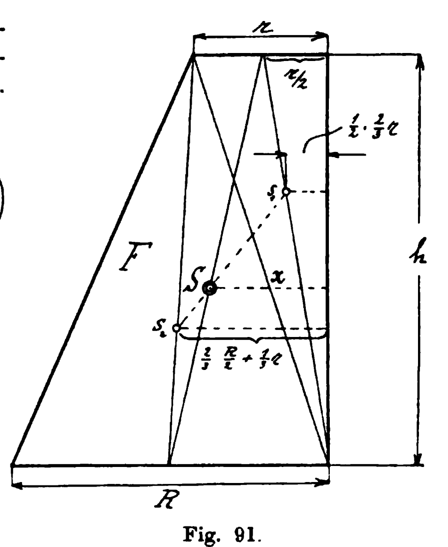


Fig. 91.

110. Es sind Oberfläche und Inhalt einer Kugel zu bestimmen.

Auflösung: $O = b \cdot 2\pi x = r\pi \cdot 2\pi x$

Lt (51c) ist $x = \frac{2r}{\pi}$, daher

$$O = r\pi \cdot 2\pi \cdot \frac{2r}{\pi}$$

$$\mathbf{O = 4r^2\pi = d^2\pi}$$

$$V = \frac{r^2\pi}{2} \cdot 2\pi x$$

Lt (58) ist $x = \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi}$

$$V = \frac{r^2\pi}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi}$$

$$\mathbf{V = \frac{4}{3} r^3\pi = \frac{\pi}{6} d^3.}$$

111. Oberfläche und Inhalt eines zylindrischen Ringes zu bestimmen. Mittlerer Durchmesser desselben sei D, der Durchmesser seines Querschnittes d. Fig. 92.

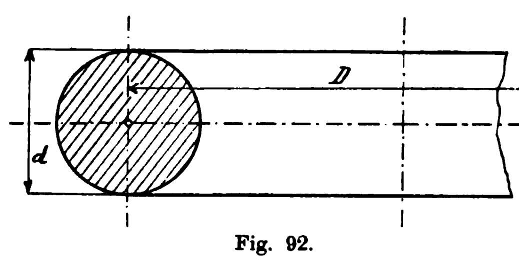


Fig. 92.

Auflösung:

$$O = b \cdot 2\pi x = d\pi \cdot 2\pi \cdot \frac{D}{2}$$

$$\mathbf{O = \pi^2 \cdot Dd}$$

$$V = F \cdot 2\pi x = \frac{d^2\pi}{4} \cdot 2\pi \cdot \frac{D}{2}$$

$$\mathbf{V = \frac{\pi^2}{4} Dd^2.}$$

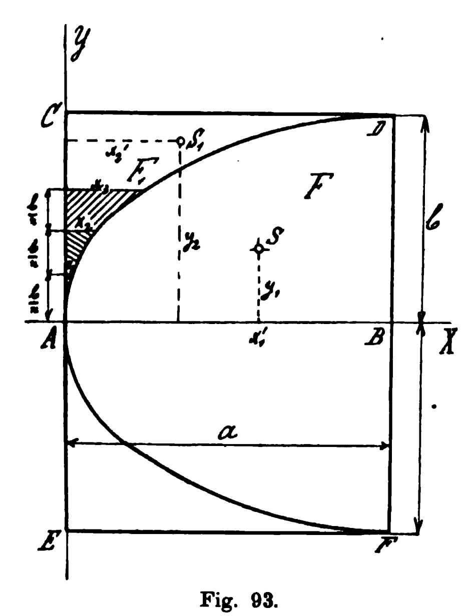


Fig. 93.

112. Die Lagen der Schwerpunkte S und S' in den Parabelstücken ABD und ACD, Fig. 93, festzustellen.

Auflösung: Sind die Flächen ABD und ACD, sowie die durch ihre Rotation um die X-Achse entstehenden Paraboloidvolumen gefunden, so lassen sich mittels der Guldinschen Regel leicht die Lagen von S und S' bestimmen. Zunächst werde F_1 gesucht. Zu diesem Ende teile man $\overline{AC} = b$ in unendlich viele gleiche Teile und ziehe durch die Teilpunkte Parallele zur X-Achse bis zur Parabel. Die Längen derselben sind, da die Parabel die Gleichung $y^2 = 2px$ hat, der Reihe nach

$$x_1 = \frac{\left(\frac{b}{n}\right)^2}{2p}, \quad x_2 = \frac{\left(2\frac{b}{n}\right)^2}{2p}, \quad \ldots\ldots$$

Die unendlich kleinen, schraffierten Rechtecke haben dann einen Inhalt

$$f_1 = \frac{\left(\frac{b}{n}\right)^2 \cdot \frac{b}{n}}{2p}, \quad f_2 = \frac{\left(2\frac{b}{n}\right)^2 \cdot \frac{b}{n}}{2p}, \quad \ldots\ldots$$

Demnach ergibt sich die Fläche F_1 mit

$$F_1 = \frac{b}{n} \cdot \frac{\left(\frac{b}{n}\right)^2}{2p} \cdot (1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + n^2) \text{ oder}$$

$$F_1 = \frac{b^3}{n^3 \cdot 2p} (1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + n^2)$$

Die Summe in der Klammer wird folgendermaßen bestimmt. Es ist

		$(n+1)^3$	$=$	n^3	$+3n^2$	$+3n$	$+1$
für $n=0$	ist	1^3	$=$	0	$+3\cdot 0$	$+3\cdot 0$	$+1$
„ $n=1$	„	2^3	$=$	1^3	$+3\cdot 1^2$	$+3\cdot 1$	$+1$
„ $n=2$	„	3^3	$=$	2^3	$+3\cdot 2^2$	$+3\cdot 2$	$+1$
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮
„ $n \ldots (n-1)$	„	n^3	$=$	$(n-1)^3$	$+3(n-1)^2$	$+3(n-1)$	$+1$
„ $n \ldots\ldots n$	„	$(n+1)^3$	$=$	n^3	$+3n^2$	$+3n$	$+1$

Durch Addition auf beiden Seiten ergibt sich demnach

$$1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3 = 1^3+\ldots+n^3+3(1^2+\ldots+n^2)+3(1+\ldots+n)+(n+1)$$

oder

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{n}{2}(n+1) - \frac{n+1}{3}$$

$$= \frac{2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)}{6}$$

$$= \frac{n+1}{6} \cdot [2(n+1)^2 - 3n - 2], \text{ d. h.}$$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n^3 \frac{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right)}{6}$$

Für $n = \infty$ wird dann

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n^3}{6} \cdot 2 = \frac{n^3}{3}$$

Also ergibt sich $F_1 = \frac{b^3}{2p \cdot n^3} \cdot \frac{n^3}{3} = \frac{b^3}{6p}$; da $p = \frac{b^2}{2a}$ ist, folgt

$$F_1 = \frac{b^3}{6\frac{b^2}{2a}} \text{ oder}$$

$$\boldsymbol{F_1 = \frac{ab}{3}}, \text{ demnach}$$

$$\boldsymbol{F = \frac{2}{3}ab}$$

Durch Rotation des Parabelstückes ABD um die X-Achse entsteht ein Paraboloid, dessen Volumen gleich dem halben Volumen des Zylinders $CDEF$ sein muß, da die Querschnitte DAF und $DCEF$ sich verhalten wie $\frac{4}{3}ab : 2ab = 1 : 2$.

Somit ergibt sich durch Anwendung der Guldinschen Regel aus

$$\frac{2}{3}ab \cdot 2\pi \cdot y_1 + \frac{1}{2}\pi b^2 a$$

$$y_1 = \frac{3}{8}b \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (64a)$$

Ebenso folgt aus der Erwägung, daß das durch Rotation des Parabelstückes ACD um die X-Achse entstehende Volumen gleich $^1/_2$ des Zylindervolumens $\pi b^2 a$ sein muß,

$$\frac{1}{3}ab \cdot 2\pi y_2 = \frac{1}{2}\pi b^2 a \quad \text{und hieraus}$$

$$y_2 = \frac{3}{4}b \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (64b)$$

y_2 ist somit zweimal so groß als y_1. — Analog läßt sich schließen, daß x'_1 zweimal so groß werden wird wie x'_2. Die durch die Rotation der Parabelstücke ABD und ACD um die Y-Achse entstehenden Volumen müssen zusammen das Zylindervolumen $\pi a^2 b$ ergeben. Es wird also

$$\frac{1}{3}ab \cdot 2\pi x'_2 + \frac{2}{3}ab \cdot 2\pi x'_1 = \pi a^2 b.$$

Beiderseits durch πab gekürzt und für $x'_1 = 2x'_2$ gesetzt, folgt

$$\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot x'_2 + \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 2x'_2 = a$$

$$\frac{10}{3}x'_2 = a$$

$$x'_2 = \frac{3}{10}a \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (64c)$$

Demnach

$$x'_1 = \frac{3}{5}a \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (64d)$$

§ 28. Ermittlung des Schwerpunktes homogener Körper.

113. Schwerpunkt einer Pyramide (eines Kegels). Fig. 94.

Auflösung: Wird die Pyramide durch zur Grundfläche parallele Ebenen in sehr dünne Schichten (Dreiecke) zerlegt, so liegen deren Schwerpunkte sämtlich in der Geraden $\overline{DM}$, welche den Schwerpunkt der Grundfläche mit der Spitze verbindet. Betrachtet man nun BCD als Grundfläche und A als Spitze der Pyramide, so muß, wenn N der Schwerpunkt des Dreieckes BCD

ist, der Schwerpunkt der Pyramide auch in der Geraden $\overline{AN}$ liegen. Er ist somit der Schnittpunkt S von $\overline{DM}$ und $\overline{AN}$. Zieht man die Hilfslinie MN, so gilt

$$\overline{EM} = \frac{1}{3}\overline{EA}$$

$$\overline{EN} = \frac{1}{3}\overline{DE}$$

Daher ist $\overline{MN} \parallel \overline{AD}$ und es wird

$\triangle SNM \sim \triangle SAD$, somit

$$\overline{MN} = \frac{1}{3}\overline{AD}$$

$$\overline{MS} = \frac{1}{3}\overline{SD}, \text{ also}$$

$$\overline{MS} = \frac{1}{4}\overline{MD} \ . \quad (65)$$

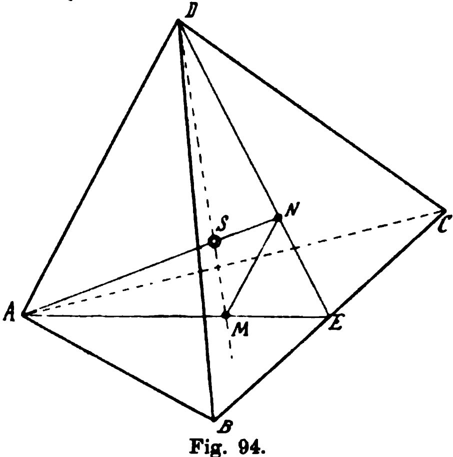


Fig. 94.

Eine vielseitige Pyramide kann durch Ebenen, welche durch die Spitze gehen, in dreiseitige Pyramiden zerlegt werden, deren Schwerpunkte sämtlich in $^1/_4$ der Höhe, also in einer zur Grundfläche parallelen Ebene liegen. In letzterer liegt dann der Schwerpunkt der ganzen Pyramide. Daher ergibt sich das Gesetz:

„Der Schwerpunkt einer Pyramide liegt in der Geraden, welche den Schwerpunkt der Basis mit der Spitze verbindet und im ersten Viertel der Höhe."

Dasselbe gilt vom Kegel, da derselbe als eine Pyramide mit unendlich viel Seiten aufgefaßt werden kann.

114. Schwerpunkt eines Pyramidenstumpfes, Fig. 95. Die Grundflächen sind F und f, Höhe ist h.

Auflösung: Der Inhalt des Pyramidenstumpfes ist

$$\frac{h}{3}(F + \sqrt{Ff} + f)$$

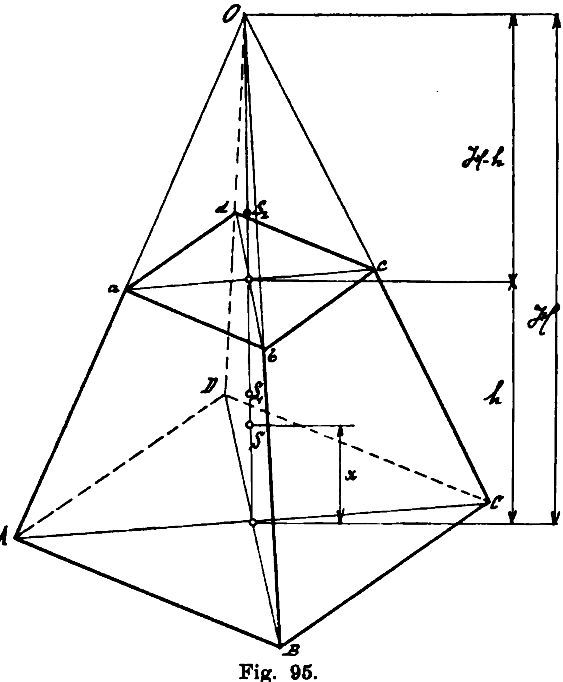


Fig. 95.

Das statische Moment des Pyramidenstumpfes in bezug auf die Grundfläche F muß gleich sein dem statischen Momente der ganzen Pyramide $ABCDO$ weniger dem der Ergänzungspyramide $abcdO$. Demnach gilt

$$\frac{h}{3}(F+\sqrt{Ff}+f)\,x=\frac{FH}{3}\cdot\frac{H}{4}-\frac{f(H-h)}{3}\left(h+\frac{H-h}{4}\right).$$

Da $H:(H-h)=\sqrt{F}:\sqrt{f}$ ist, wird

$$H-(H-h):H=(\sqrt{F}-\sqrt{f}):\sqrt{F}\ \text{oder}$$

$$h:H=(\sqrt{F}-\sqrt{f}):\sqrt{F},\ \text{woraus}$$

$$H=\frac{h\sqrt{F}}{\sqrt{F}-\sqrt{f}}\ \text{sich ergibt. Somit folgt}$$

$$\frac{h}{3}(F+\sqrt{Ff}+f)\,x=\frac{F}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{h^2F}{(\sqrt{F}-\sqrt{f})^2}-\frac{f}{3}\cdot\frac{h\sqrt{f}}{\sqrt{F}-\sqrt{f}}\left[\frac{\frac{h\sqrt{F}}{\sqrt{F}-\sqrt{f}}+3h}{4}\right]$$

$$hx(F+\sqrt{Ff}+f)=\frac{F^2h^2}{4(\sqrt{F}-\sqrt{f})^2}-\frac{fh\sqrt{f}}{\sqrt{F}-\sqrt{f}}\cdot\frac{4h\sqrt{F}-3h\sqrt{f}}{4(\sqrt{F}-\sqrt{f})}$$

$$x=\frac{h}{4}\cdot\frac{\dfrac{F^2-4f\sqrt{Ff}+3f^2}{(\sqrt{F}-\sqrt{f})^2}}{F+\sqrt{Ff}+f}=\frac{h}{4}\cdot\frac{\dfrac{F^2-4f\sqrt{Ff}+3f^2}{F-2\sqrt{Ff}+f}}{F+\sqrt{Ff}+f}$$

$$(F^2-4f\sqrt{Ff}+3f^2):(F-2\sqrt{Ff}+f)=F+2\sqrt{Ff}+3f$$

$$-F^2-Ff+2F\sqrt{Ff}$$

$$2F\sqrt{Ff}-4f\sqrt{Ff}-Ff+3f^2$$

$$-2F\sqrt{Ff}-2f\sqrt{Ff}+4Ff$$

$$3Ff-6f\sqrt{Ff}+3f^2$$

$$-3Ff+6f\sqrt{Ff}-3f^2$$

$$0$$

somit $$x=\frac{h}{4}\cdot\frac{F+2\sqrt{Ff}+3f}{F+\sqrt{Ff}+f}\ \ldots\ldots\ldots\ (66)$$

117. Schwerpunkt eines Kegelstumpfs. Die Radien der Grundflächen seien R und r, die Höhe sei h (Fig. 96).

Auflösung.

$$\frac{\pi h}{3}(R^2+Rr+r^2)\,x=\frac{R^2\pi H}{3}\cdot\frac{H}{4}-\frac{r^2\pi(H-h)}{3}\left(h+\frac{H-h}{4}\right)$$

$$H:(H-h)=\sqrt{R^2\pi}:\sqrt{r^2\pi}=R\sqrt{\pi}:r\sqrt{\pi}$$

$$H:(H-h)=R:r$$

$$h:H=(R-r):R$$

$$H=\frac{hR}{R-r}$$

$$\pi h (R^2 + Rr + r^2)\, x = \frac{R^2\pi}{4} \cdot \frac{h^2 R^2}{(R-r)^2} - r^2\pi \left(\frac{hR}{R-r} - h\right)\left(h + \frac{\frac{hR}{R-r} - h}{4}\right)$$

$$\pi (R^2 + Rr + r^2)\, x = \frac{R^4 h\pi}{4(R-r)^2} - r^2\pi \left(\frac{R}{R-r} - 1\right) \cdot \frac{4h + \frac{hR}{R+r} - h}{4}$$

$$= \frac{h\pi}{4} \cdot \frac{R^4}{(R-r)^2} - r^2\pi \frac{r}{R-r} \cdot \frac{4Rh - 4hr + hR - hR + rh}{4(R-r)}$$

$$= \frac{h\pi}{4} \cdot \frac{R^4}{(R-r)^2} - \frac{r^3\pi (4Rh - 3hr)}{4(R-r)^2}$$

$$= \frac{h\pi}{4} \left\{\frac{R^4 - r^3(4R - 3r)}{(R-r)^2}\right\} = \frac{h\pi}{4} \cdot \frac{R^4 - 4Rr^3 + 3r^4}{(R-r)^2}$$

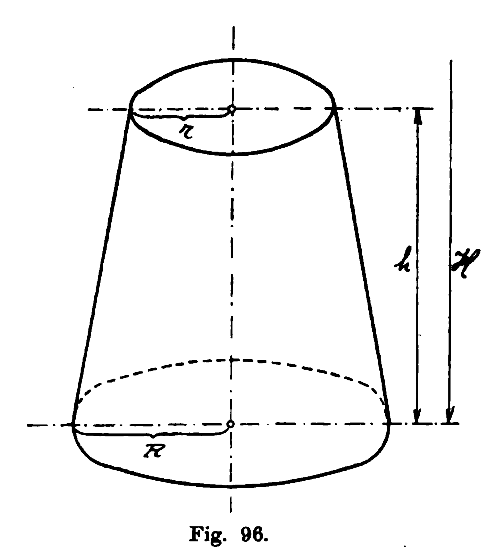


Fig. 96.

$$(R^4 - 4Rr^3 + 3r^4) : (R^2 - 2Rr + r^2) = R^2 + 2Rr + 3r^2$$

$$\underline{-R^4 \mp 2R^3 r \pm R^2 r^2}$$

$$2R^3 r - 4Rr^3 - R^2 r^2 + 3r^4$$

$$\underline{-2R^3 r \mp 4R^2 r^2 \pm 2Rr^3}$$

$$3R^2 r^2 - 6Rr^3 + 3r^4$$

$$\underline{-3R^2 r^2 \mp 6Rr^3 \pm 3r^4}$$

$$\emptyset$$

$$x = \frac{h\pi}{4} \cdot \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (67)$$

116. Schwerpunktslage in einem Kugelsektor (Kugelausschnitt). Kugelhalbmesser r, Höhe der Kalotte $CD = h$. — Fig. 97.

Auflösung: Man denke sich den Kugelsektor in unendlich viele Pyramiden zerlegt, deren Grundflächen f sind und deren Spitzen sämtlich in M liegen. Alle diese Pyramiden haben ihre Schwerpunkte in der Entfernung $\frac{3}{4} r$ von M. Der geometrische Ort derselben ist eine Kalotte, die derjenigen, welche den Sektor begrenzt, ähnlich ist. Der Schwerpunkt des Sektors S fällt hiermit mit dem der neuen Kalotte zusammen.

Fig. 97.

Beschreibt man um die Kugel, von welcher der Sektor ein Teil ist, einen sie einhüllenden Zylinder, so ist dessen Mantelfläche (Achse ist JK) gleich $2r\pi \cdot 2r = 4r^2\pi$, also gleich der Oberfläche der Kugel mit dem Radius r. — Daher muß der halbe Mantel des Zylinders gleich sein der Oberfläche der Halbkugel, allgemein ein Zylindermantel mit der Höhe h gleich der Oberfläche der Kalotte mit der Pfeilhöhe h. D. h. diese Oberflächen sind je $2r\pi h$.

Weil nun der Zylindermantel seinen Schwerpunkt in der Hälfte seiner Höhe hat, so hat die Kalotte den ihren auch in halber Höhe. S, der Mittelpunkt von $\overline{D_1 C_1}$, ist somit der gesuchte Schwerpunkt des Kugelsektors.

Nun ist
$$\overline{MD_1} = \frac{3}{4} \overline{MD} = \frac{3}{4}(r - h)$$

$$\overline{D_1 C_1} = \overline{MC_1} - \overline{MD_1} = \frac{3}{4} r - \frac{3}{4}(r - h) = \frac{3}{4} h$$

$$\overline{D_1 S} = \frac{1}{2} \overline{D_1 C_1} = \frac{3}{8} h$$

$$\overline{MS} = \overline{MD_1} + \overline{D_1 S} = \frac{3}{4}(r - h) + \frac{3}{8} h = \frac{3}{4} r - \frac{3}{4} h + \frac{3}{8} h$$

$$x = \frac{3}{8}(2r - h) \qquad \text{. . . . . (68)}$$

117. Schwerpunktslage in einem Kugelabschnitt. Pfeilhöhe des Abschnittes sei h, Radius der Kugel sei r — Fig. 98.

Auflösung: Das statische Moment der Kalotte muß gleich sein demjenigen des Kugelsektors, minus dem des Kegels. Momentenebene ist EE_1.

Zur Auflösung der Aufgabe müssen zunächst die Inhalte von Kugelsektor und von Kalotte gefunden werden. Der Sektor kann aus unendlich vielen Pyramiden, deren Grundflächen die Oberfläche der Kalotte bilden und deren Spitzen in O liegen, zusammengesetzt gedacht werden. Mithin wird sein

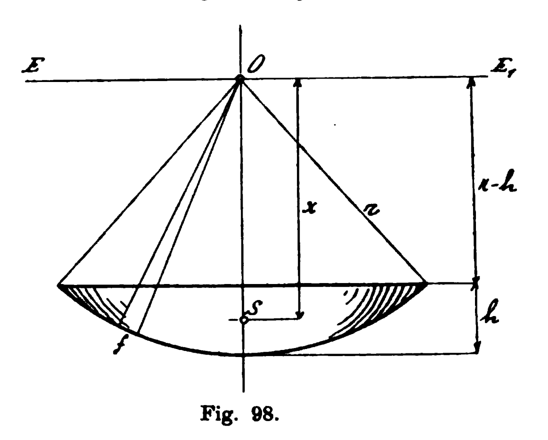


Fig. 98.

Inhalt $J_1 = 2r\pi h \cdot \frac{r}{3} = \frac{2}{3}\pi r^2 h$. — Der Inhalt der Kalotte ist dann

$$J_2 = \frac{2}{3}\pi r^2 h - [r^2 - (r-h)^2]\,\pi \cdot \frac{r-h}{3}$$

$$= \frac{2}{3}\pi r^2 h - (r^2 - r^2 + 2rh - h^2)\frac{\pi}{3}(r-h)$$

$$= \frac{2}{3}\pi r^2 h - \frac{2}{3}\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r h^2 + \frac{\pi r h^2}{3} - \frac{\pi}{3} h 3$$

$$J_2 = \pi r h^2 - \frac{\pi}{3} h^3 = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$$

Demnach ist

$$\frac{\pi h^2}{3}(3r-h)\,x = \frac{2}{3}\pi r^2 h \cdot \frac{3}{8}(2r-h) - \frac{r^2-(r-h)^2}{3}\pi(r-h)\cdot\frac{3}{4}(r-h)$$

$$h(3r-h)\,x = \frac{3}{4}r^2(2r-h) - (2r-h)\cdot\frac{3}{4}(r-h)^2$$

$$x = \frac{3}{4}\cdot\frac{(2r-h)\cdot[r^2-(r-h)^2]}{h(3r-h)} = \frac{3}{4}\cdot\frac{(2r-h)(2rh-h^2)}{h(3r-h)}$$

$$x = \frac{3}{4}\cdot\frac{(2r-h)^2}{3r-h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (69)$$

Für eine Halbkugel wird $h = r$, daher $x = \frac{3}{4}\cdot\frac{(2r-r)^2}{3r-r}$

$$x = \frac{3}{8}r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (70)$$

Für eine hohle Halbkugel mit den Radien R und r gilt

$$\left(\frac{2}{3}\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi r^3\right) x = \frac{2}{3}\pi R^3 \cdot \frac{3}{8} R - \frac{2}{3}\pi r^3 \cdot \frac{3}{8} r$$

$$(R^3 - r^3)\, x = \frac{3}{8} \cdot R^4 - \frac{3}{8} r^4$$

$$x = \frac{3}{8} \cdot \frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (71)$$

118. Schwerpunktslager in einem Rotationsparaboloid. — Fig. 99.

Auflösung: Nach früherem ist schon bekannt, daß der Inhalt eines Rotationsparaboloides gleich $\frac{\pi}{2} b^2 a$ ist.

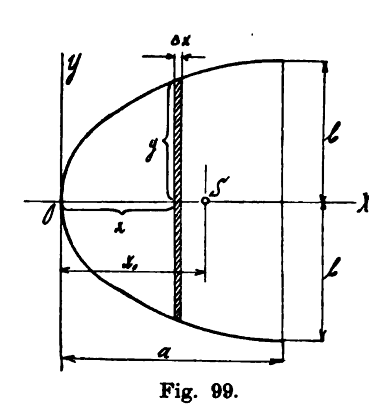


Fig. 99.

Teilt man das Paraboloid durch zur Y Achse parallele und zur X Achse senkrechte Ebenen in unendlich viele Zylinder, so gilt

$$\Sigma[(y^2 \pi \cdot \triangle x) \cdot x] = \frac{\pi}{2} b^2 a \cdot x_0$$

$$\Sigma(2 p x^2 \cdot \pi \cdot \triangle x) = \frac{\pi}{2} b^2 a \cdot x_0$$

$$2 p \pi \cdot \Sigma(x^2 \cdot \triangle x) = \frac{\pi}{2} b^2 \cdot a \cdot x_0$$

Da $b^2 = 2pa$ ist, wird

$$\frac{b^2}{a} \pi \cdot \Sigma(x^2 \cdot \triangle x) = \frac{\pi}{2} b^2 a x_0$$

Die Summe $x^2 \cdot \triangle x$ ist zu bilden von $x = 0$ bis $x = a$. — Zu diesem Ende werde eine quadratische Pyramide, Fig. 100, deren Basis die Seite a hat und deren Höhe a ist, gedacht. Wird sie in der Entfernung x und in der Entfernung $x + \triangle x$ von der Spitze durch zur Basis parallele Ebenen geschnitten, so entsteht zwischen denselben ein kleiner Körper vom Inhalte $x^2 \cdot \triangle x$. — Denkt man sich die ganze Pyramide aus lauter solchen kleinen Körpern gebildet, so wird

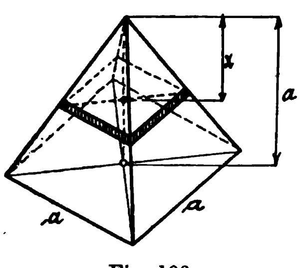


Fig. 100.

$$\Sigma(x^2 \cdot \triangle x) = a^2 \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^3}{3}$$

Daher wird

$$\frac{b^2}{a} \cdot \pi \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{\pi}{2} \cdot b^2 \cdot a \cdot x_0$$

$$\frac{1}{3} a = \frac{1}{2} x_0 \quad \text{oder}$$

$$x^0 = \frac{2}{3} a \quad \ldots \ldots \quad (72)$$

§ 29. Die drei möglichen Gleichgewichtsfälle.

Wirkt auf einen in einem einzigen Punkte unterstützten (z. B. aufgehängten) Körper nur das in seinem Schwerpunkte angreifende Eigengewicht, so befindet sich der Körper im Gleichgewichte, wenn Unterstützungs- und Schwerpunkt in derselben Vertikalen liegen.

a) Fallen Unterstützungs- und Schwerpunkt zusammen, so bleibt der Körper in jeder Lage in Ruhe. Dieses Gleichgewicht heißt **unentschiedenes oder indifferentes Gleichgewicht.** In diesem befinden sich z. B. um horizontale Achsen sich drehende Räder.

b) Liegt der Schwerpunkt unterhalb des Unterstützungspunktes, so wird des Körpers Gleichgewicht **stabil** genannt. Wird derselbe aus seiner Lage gebracht, so kehrt er immer wieder in dieselbe zurück. In stabilem Gleichgewichte ist z. B. ein in einem Endpunkte aufgehängter und in einer vertikalen Ebene schwingender Stab (Pendel).

c) Befindet sich aber der Schwerpunkt eines Körpers oberhalb seines Unterstützungspunktes, so ist nur in diesem Falle Gleichgewicht vorhanden. Wird der Körper aus seiner Lage gebracht, so kehrt er nicht wieder in diese zurück. Diese Art des Gleichgewichtes heißt **labiles Gleichgewicht.** In demselben befindet sich z. B. ein auf seiner Spitze balanciertes Schwert, eine mit ihrem Schwerpunkte auf eine Nadelspitze gesetzte homogene Platte usw.

§ 30. Arbeit, Leistung und Wirkungsgrad.

Aus der Einleitung ist schon bekannt, daß jeder freie Körper unter dem Einflusse einer Kraft in Bewegung gesetzt wird. Die Wirkung der Kraft auf einem bestimmten Wege heißt nun die **Arbeit** (auch **mechanische Arbeit**) der Kraft.

Letztere ist nun direkt proportional der Größe des Weges, aber unabhängig von der Zeit, in welcher sie zustande kommt.

Der mathematische Ausdruck für die Größe der Arbeit ist daher

$$A = P \cdot s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (73)$$

Die Wirkung der Kraft ist nun nichts anderes als die Überwindung eines Widerstandes während des Weges, z. B. beim Heben von Lasten die Überwindung des Gewichtes derselben, bei gleichförmiger Bewegung die Überwindung der Reibung zwischen Körper und seiner Unterlage, bei gleichförmig beschleunigter Bewegung die Überwindung der Reibung und die Überwindung des Widerstandes des Körpers gegen die Annahme der Beschleunigung, d. h. die Überwindung der Trägheit.

Die Arbeitseinheit ist jene Arbeit, welche 1 kg auf dem Wege 1 m leistet. Sie heißt ein **Meterkilogramm** und wird abgekürzt 1 **mkg** geschrieben.

Zum Heben der Last $Q = 100$ kg auf eine Höhe von 1,5 m sind 150 mkg, zum Fortziehen eines Körpers auf einer horizontalen Ebene mittelst einer Kraft $P = 15$ kg auf einem Wege von 5 m sind 75 mkg nötig.

Andere Arbeitseinheiten werden später noch angegeben werden.

Die Arbeit pro Zeiteinheit

$$L = \frac{A}{t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (74)$$

wird **Leistung** oder **Effekt** genannt. Einheit der Leistung ist ein **Meterkilogramm pro Sekunde**, auch **Sekundenmeterkilogramm** genannt. Die abgekürzte Bezeichnung für diese Leistungseinheit ist **mkg/sek**

Diese letztere Einheit ist für die Technik zu klein. Es wurde daher eine größere aus 75 mkg/sek gebildet und diese eine **PS**, d. h. eine **Pferdestärke** genannt.

$$\mathbf{1\,PS = 75\,mkg/sek} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (75)$$

Die englische Bezeichnung für 75 mkg/sek, nämlich HP (horse-power) ist in Deutschland jetzt nicht mehr üblich.

Will man L mkg/sek in PS verwandeln, so muß man dieselben durch 75 dividieren. Die Leistung in PS ist demnach

$$N = \frac{L}{75} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (76)$$

Behufs Übertragung der Wirkungen von Kräften werden Maschinen angewandt. Die von denselben aber abgenommenen Leistungen sind immer geringer als die theoretisch möglichen der ausgenützt werden sollenden Kräfte. Das Verhältnis aus der Nutzleistung einer Maschine zur theoretischen, welche vorhanden wäre, wenn innerhalb der Maschine keinerlei Effektsverluste entstehen würden, heißt der **Wirkungsgrad** der Maschine. Wird die Nutzleistung mit N_n bezeichnet, die theoretisch mögliche mit N, dann lautet die Formel für den Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{N_n}{N} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (77)$$

Der Wirkungsgrad einer Maschine ist keine durch Rechnung bestimmbare Zahl, sondern nur ein Erfahrungswert. Bestimmt wird er, wie später gezeigt werden wird, durch Bremsen.

Beispiele.

119. Wie groß ist die Arbeit eines Spaziergängers während eines 1500 m langen und horizontal verlaufenden Weges unter der Annahme, daß sich sein 75 kg schwerer Körper bei jedem 75 cm langen Schritte um 25 mm hebt?

Auflösung: Während eines Weges von 1500 m hebt sich der Körper des Spaziergängers um $25 \cdot \frac{1500}{0{,}75}$ mm $= \frac{1500}{0{,}03}$ mm $= 50000$ mm $= 50$ m. — Daher ist seine geleistete Arbeit

$$A = 75 \cdot 50\,\text{mkg}$$
$$\mathbf{A = 3750\,mkg}$$

120. An einem Wasserfall stürzen pro Minute 20 cbm Wasser 10 m hoch herab. Wieviel PS gehen hier verloren?

Auflösung:
$$N = \frac{20000\,\text{kg} \cdot 10\,\text{m}}{60 \cdot 75}$$
$$\mathbf{N \sim 44{,}5\,PS}$$

121. Wie lautet allgemein die Formel für die Leistung einer Turbine, durch welche pro Sekunde Q cbm Wasser fließen und welche ein Gefälle von H m ausnutzt, wenn ihr Wirkungsgrad $\eta = 0{,}75$ beträgt?

$$N_n = 0{,}75 \cdot \frac{(Q \cdot 1000\,\text{kg}) \cdot H\,\text{m}}{75}\,\text{PS}$$
$$\mathbf{N_n = 10\,QH}$$

122. Wieviele PS sind zum Betriebe einer Dampfspritze, welche pro Sekunde 50 l Wasser 15 m hoch werfen soll, erforderlich, wenn die Reibungsverluste unberücksichtigt gelassen werden?

Auflösung: $$N = \frac{50 \cdot 15}{75} = 10 \text{ PS}$$

123. An den Enden eines Fadens, der über zwei im Abstande 2 l befindlichen Röllchen geht, hängen die zwei gleichen Gewichte mg — In der Mitte der Röllchen wird nun auf den Faden das Gewicht $m' \cdot g$ gelegt. Wie tief fällt dasselbe? Fig. 101.

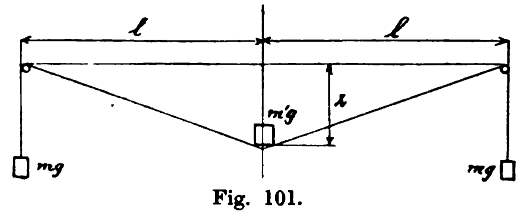


Fig. 101.

Auflösung: Die Arbeit des fallenden Gewichtes $m'g$ ist $m'g \cdot x$ — Dieselbe muß gleich sein der zur Hebung der Gewichte mg nötigen zwei gleichen Arbeiten. Letztere sind je

$$mg\,(\cdot \sqrt{l^2 + x^2} - l).$$

Somit existiert die Beziehung

$$m' \cdot g \cdot x = 2\,mg\,[\sqrt{l^2 + x^2} - l]$$

$$(m'x + 2\,ml)^2 = 4\,m^2\,(l^2 + x^2)$$

$$m'^2 \cdot x^2 + 4\,mm'l \cdot x + 4\,m^2\,l^2 = 4\,m^2 l^2 + 4\,m^2 x^2$$

$$m'^2 \cdot x + 4\,mm'l = 4\,\mathrm{m}^2 \cdot x$$

$$x\,(4\,m^2 - m'^2) = 4\,mm'l$$

$$x = \frac{4\,mm'l}{4\,m^2 - m'^2}$$

124. In dem Zylinder einer Dampfmaschine beträgt der mittlere Dampfdruck $p = 2$ kg/qcm. Der Zylinder hat eine Bohrung $D = 360$ mm, der Hub beträgt $S = 600$ mm. Die Tourenzahl der Maschine ist $n = 100$, ihr Wirkungsgrad ist $\eta = 0{,}75$. Wie groß ist die Leistung dieser Maschine?

Auflösung: Der nützliche Zylinderquerschnitt ist gleich $\frac{D^2 \pi}{4}$ minus dem Querschnitte der Kolbenstange. Da letzterer den Durchmesser $\frac{D}{7}$ besitzt, ist demnach der erstere

$$\frac{D^2 \pi}{4} - \frac{\left(\frac{D}{7}\right)^2 \cdot \pi}{4} = \frac{\pi}{4} D^2 \left(1 - \frac{1}{49}\right) \sim \frac{\pi}{4} D^2 \left(1 - \frac{1}{50}\right), \text{ also}$$

$$0{,}98 \frac{\pi}{2} D^2$$

Der Totaldruck auf den Kolben wird dann

$$0{,}98 \cdot \frac{\pi}{4} D^2 \cdot p \text{ kg}$$

Der Weg des letzteren in einer Sekunde beträgt

$$\frac{2\,S\,n}{60} = \frac{n\,S}{30} \text{ Meter.}$$

Die theoretische Leistung der Maschine ergibt sich daher mit

$$N = 0{,}98\,\frac{D^2\,\pi}{4} \cdot p \cdot \frac{n\,S}{30 \cdot 75}\ \text{PS}$$

die wirkliche mit
$$N_n = \eta \cdot 0{,}98\,\frac{D^2\,\pi}{4} \cdot p \cdot \frac{n\,S}{30 \cdot 75}\ \text{PS}$$

$$N_n = 0{,}75 \cdot 0{,}98 \cdot \frac{36^2 \cdot \pi}{4} \cdot 2 \cdot \frac{100 \cdot 0{,}6}{30 \cdot 75}\ \text{PS}$$

$$\boldsymbol{N_n \sim 40\ \text{PS}}$$

125. Eine Speicheranlage besteht aus zwei Aufzügen für je 1000 kg Nutzlast und 20,5 m Förderhöhe und einem Kran für 1500 kg Nutzlast und 11 m Förderhöhe. Der Antrieb der Hebemaschinen ist hydraulisch, der Betriebsdruck 50 Atm. In Betrieb sind immer ein Aufzug und der Kran. Die Förderschale jedes Aufzugs wiege 150 kg, das Hakengewicht an der Krankette sei 50 kg. Die Hubgeschwindigkeit der Lasten darf höchstens 0,5 m/sek betragen. Welche Leistung muß die Druckpumpe, die das Betriebswasser liefert, haben, falls ihr Wirkungsgrad mit 0,85 angenommen wird? Der Wirkungsgrad der Hebezeuge ist 0,7 —

Auflösung: Jeder Hub erfordert 40 Sekunden. Wird behufs Aufsetzens und Abnehmens der Last je 1 Minute gerechnet, so können die Hebezeuge alle 3 Minuten bedient werden.

Die Betriebspumpe hat also den nötigen Wasserbedarf in 3 Minuten zu decken.

Für jeden Aufzug ist eine Betriebsarbeit von

$$\frac{1150 \cdot 20{,}5}{0{,}7}\ \text{mkg}$$

erforderlich. Ein kg Druckwasser hat eine Arbeitsfähigkeit von 500 mkg, da es eine Wassersäule 500 m hoch zu heben vermag. Zur Arbeit $\frac{1150 \cdot 20{,}5}{0{,}7}$ mkg sind somit so viele kg (Liter) Druckwasser nötig als 500 in $\frac{1150 \cdot 20{,}5}{0{,}7}$ enthalten ist.

$$x_1 = \frac{1150 \cdot 20{,}5}{0{,}7 \cdot 500} = 67\ \text{l}$$

Desgleichen braucht man pro Hub des Kranes

$$x_2 = \frac{1550 \cdot 11}{0{,}7 \cdot 500} = 49\ \text{l}$$

Zusammen sind daher $x \sim 125$ l Wasser nötig, wenn 9 l als Ersatz für Verluste in Rechnung gestellt werden.

Pro Sekunde hat die Betriebspumpe

$$\frac{125}{3} \cdot \frac{1}{60 \cdot 0{,}85}\ \text{l}$$

Wasser zu liefern. Da die Arbeitsfähigkeit von 1 kg Wasser pro Sekunde $\frac{500}{75}$ mkg beträgt, ist die Leistung der Pumpe

$$N_n = \frac{125 \cdot 500}{3 \cdot 60 \cdot 0{,}85 \cdot 75} \text{ PS}$$

$$\boldsymbol{N_n \sim 5{,}5 \text{ PS}}$$

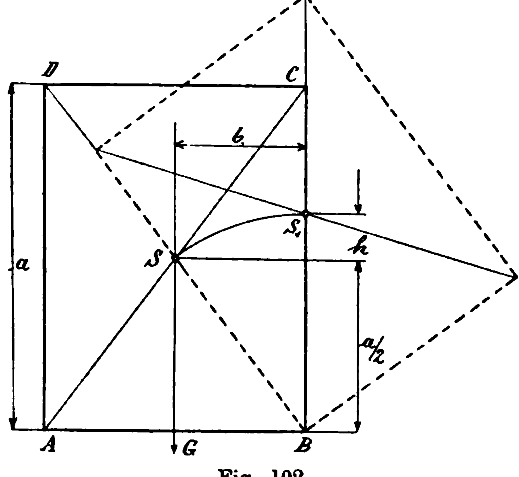


Fig. 102.

126. Die mechanische Arbeit, welche eine Kraft P leisten muß, um einen in sicherer Gleichgewichtslage befindlichen Körper in die unsichere, d. h. seinen Schwerpunkt S, Fig. 102, vertikal über seine Kippkante zu bringen, heißt **dynamische Standsicherheit.** Das statische Moment des Eigengewichtes des Körpers in bezug auf die Kippkante heißt **Stabilitäts- oder Standsicherheitsmoment.**

Erstere ist . . . . $\boldsymbol{A = G \cdot h}$ . . . . **(78)**

Letztere bestimmt sich mit $\boldsymbol{M = G \cdot b}$ . . . . **(79)**

Ein parallelopipedischer Gußeisenblock $ABCD$, Fig. 102, hat $a = 0{,}5$ m Höhe, $b = 0{,}3$ m Breite und $c = 0{,}2$ m Tiefe. Wie groß ist dessen Standsicherheitsmoment und wie groß ist die mechanische Arbeit, um den Block umzuwerfen, wenn das spezifische Gewicht des letzteren $\gamma = 7200$ kg/cbm beträgt?

Auflösung: Das Gewicht des Blocks ist

$$G = 0{,}5 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 7200 = 0{,}03 \cdot 7200 \text{ kg}$$

$$G = 216 \text{ kg}$$

Das Standsicherheitsmoment in bezug auf die Kante B ist somit

$$M = 216 \cdot 0{,}15 \text{ mkg}; \qquad \boldsymbol{M = 32{,}4 \text{ mkg}}$$

Das Maß, um welches der Schwerpunkt gehoben werden muß, beträgt

$$h = \overline{BS_1} - \frac{a}{2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2} - \frac{a}{2} = \sqrt{0{,}25^2 + 0{,}15^2} - 0{,}25$$

$$h \sim 0{,}06 \text{ m}$$

Folglich ist die dynamische Standsicherheit

$$A = 216 \cdot 0{,}06$$

$$\boldsymbol{A = 12{,}96 \text{ mkg}}$$

127. Eine Scheibe hat N PS bei n Touren zu übertragen. Wie groß ist das an ihrem Umfange wirkende Drehmoment?

Auflösung: Die Umfangsgeschwindigkeit der Scheibe ist $v = \frac{2 R \pi n}{60}$ Meter, wenn der Scheibenradius R in Metern eingesetzt ist. Ist nun P kg die Umfangskraft an der Scheibe, so überträgt dieselbe den Effekt

$$\boldsymbol{N = \frac{P \cdot v}{75}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \textbf{(80)}$$

Daher ergibt sich $N = \frac{P \cdot 2 R \pi n}{60 \cdot 75}$ und daraus

$$M = P \cdot R = \frac{60 \cdot 75}{2 \pi} \cdot \frac{N}{n} \text{ oder}$$

$$\mathbf{M = 716{,}2 \frac{N}{n} \text{ mkg} = 716\,200 \frac{N}{n} \text{ mmkg}} \quad . . . . \text{ (81)}$$

128. Das Schwungrad der in Beispiel 124 dimensionierten Dampfmaschine hat einen Durchmesser $D = 2{,}8$ m. — Wie groß ist die Umfangskraft an demselben?

Auflösung:

$$N = \frac{P \cdot v}{75}$$

$$P = \frac{75 N}{\frac{D \pi n}{60}} = \frac{60 \cdot 75 \cdot 40}{2{,}8 \pi \cdot 100}$$

$$\mathbf{P = 205 \text{ kg}}$$

129. Das treibende Kegelrad einer vertikal geachsten Turbine hat einen Durchmesser $D = 3440$ mm und muß eine Leistung von $N = 246$ PS bei $n = 46$ Touren übertragen. Wie groß ist der Zahndruck in diesem Kegelrade?

$$v = \frac{D \pi n}{60} = \frac{3{,}44 \cdot \pi \cdot 46}{60}$$

$$v = 8{,}25 \text{ m}$$

$$\frac{Z \cdot v}{75} = N$$

$$Z = \frac{75 \cdot 246}{8{,}25}$$

$$\mathbf{Z = 2225 \text{ kg}}$$

---

§ 31. Die gleitende Reibung.

Der fortschreitenden Bewegung eines Körpers von bestimmtem Materiale auf irgend einer Unterlage wirkt immer eine dieselbe verzögernde Ursache entgegen. — Man nennt letztere die **gleitende Reibung.** — Sie wird bedingt durch das Gewicht des Körpers, durch die Unebenheiten der Auflagefläche des Körpers und durch die seiner Unterlage, sowie durch die Art des Materiales beider, endlich zum Teil durch die Adhäsion.

Je nachdem Körper und Unterlage in direkter oder indirekter Berührung sind — letzteres ist der Fall bei Anwendung von Schmiermitteln —, unterscheidet man direkte (unmittelbare) und indirekte (mittelbare) Reibung.

Ein Schlitten sei durch ein Gewicht belastet und mit demselben Q kg schwer. — Am Ende des Schlittens, Fig. 103, ist eine Schnur befestigt, welche über eine Rolle geführt wird und an deren Ende sich ein Gewicht befindet. Dasselbe wird nun so groß genommen, daß ein Anstoß an den Schlitten genügt, um ihn in gleichförmige Bewegung zu setzen. Dann stellt P jene Kraft vor, welche die Reibung überwindet und zwar deshalb, weil die Be-

wegung des Schlittens eine gleichförmige geworden ist. Indem man den Schlitten nun mehr oder weniger belastet, hat man es in der Hand, den Reibungswiderstand abhängig von allen möglichen Umständen zu messen.

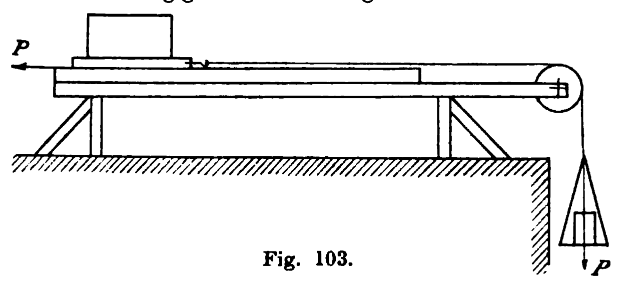


Fig. 103.

Gesetze über die gleitende Reibung:

1. Der Reibungswiderstand ist abhängig vom Stoffe der sich berührenden Körper. Er wird um so kleiner, je glatter und härter die Körper sind. Bei Holz ist die Reibung geringer, wenn die Berührung von Holz und Holz parallel zur Faserrichtung erfolgt. Öle und Fette verringern die Reibung; Wasser zwischen Hölzern vergrößert die Reibung.
2. Die Reibung ist abhängig vom Normaldruck des Körpers auf die Unterlage und zwar demselben proportional (die Adhäsion zwischen Körper und Unterlage ist vom Normaldruck aber unabhängig).
3. Der Reibungswiderstand ist unabhängig von der Größe der Berührungsflächen der Körper (Adhäsion ist dagegen von ihr abhängig). Wenn bei demselben Normaldruck die Berührungsflächen größer werden, so wird der spezifische Normaldruck kleiner, die spezifische Reibung wird kleiner, die totale bleibt gleich.
4. Der Reibungswiderstand während der Bewegung ist nahezu unabhängig von der Geschwindigkeit derselben.
5. Die Reibung der Ruhe ist größer als diejenige der Bewegung.

Ist für 1 kg Normaldruck der Reibungswiderstand f, so ist derselbe bei N kg Normaldruck

$$W = f \cdot N \qquad (82)$$

„Der Reibungswiderstand pro 1 kg Normaldruck heißt **Reibungskoeffizient.** Der totale Reibungswiderstand ist also gleich dem Produkte aus Reibungskoeffizient mal Normaldruck des Körpers."

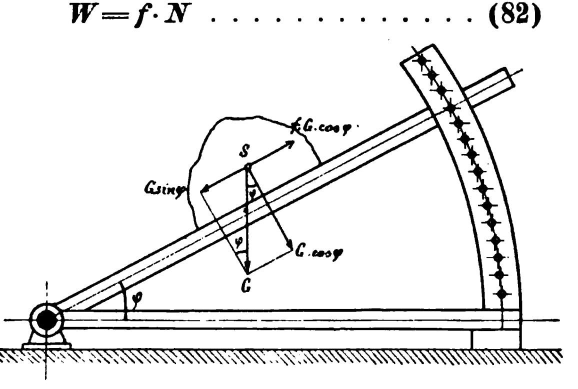


Fig. 104.

Zur Messung von f dient folgende Erwägung: Wird eine schiefe Ebene, Fig. 104, auf welcher sich ein Körper, dessen Reibungskoeffizient bestimmt werden soll, so lange gegen die Horizontale geneigt, bis der Körper nicht mehr von ihr heruntergleitet, so gilt die Beziehung

$$G \cdot \sin \varphi = f \cdot G \cos \varphi, \text{ d. h.}$$

$$f = \operatorname{tg} \varphi \qquad (83)$$

D. h. „Der Reibungskoeffizient ist die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die schiefe Ebene, auf welcher sich der Körper befindet, mit dem Horizonte einschließen muß, damit der letztere von ihr nicht mehr heruntergleite.“

„Den Winkel φ nennt man **Reibungswinkel.**“

Bewegt sich ein Körper auf horizontaler Unterlage, so ist also $P = W = fN$, Fig. 105, oder $f = \frac{P}{N} = \operatorname{tg} \varphi$. — Der Winkel φ ist derjenige, den der Normaldruck N und die Resultierende R aus N und P einschließen.

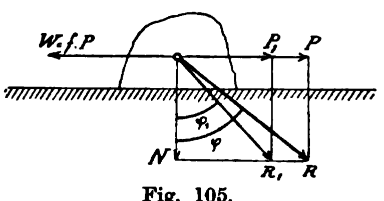


Fig. 105.

Da nun die Bewegung des Körpers nach allen Richtungen stattfinden kann, so begrenzen die Richtungen aller Resultierenden R einen Kegel, welcher **Reibungskegel** genannt wird.

Ist nun eine Kraft P_1 nicht imstande, den Körper in gleichförmige Bewegung zu setzen oder ihn in derselben zu erhalten, so ist der Winkel φ_1, welchen jetzt die Resultierende R_1 und N bilden, kleiner als φ; die Resultierende fällt in den Reibungskegel.

Beispiele.

130. Unter welchem Winkel α gegen den Horizont muß eine G kg schwere Leiter mindestens in Fig. 106 geneigt sein, damit sie im Gleichgewichte bleibe? Der Reibungskoeffizient ist f.

Auflösung: Dem Umfallen der Leiter wirken entgegen die Reibungswiderstände fN_1 und fN_2. Dann wird

$$N_1 = fN_2$$
$$fN_1 + N_2 = G$$
$$f^2N_2 + N_2 = G$$
$$N_2 = \frac{G}{1+f^2}; \quad N_1 = \frac{fG}{1+f^2}$$

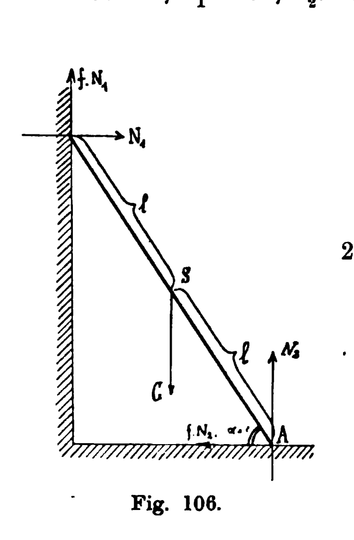


Fig. 106.

Aus $\Sigma(M) = 0$, z. B. in Bezug auf A wird

$$fN_1 \cdot 2l\cos\alpha + N_1 \cdot 2l\sin\alpha - G \cdot l\cos\alpha = 0$$
$$2f\cos\alpha \cdot \frac{fG}{1+f^2} + 2\sin\alpha \cdot \frac{fG}{1+f^2} - G\cos\alpha = 0$$
$$\frac{2f^2\cos\alpha}{1+f^2} + \frac{2f\sin\alpha}{1+f^2} - \cos\alpha = 0$$
$$2f^2\cos\alpha + 2f\sin\alpha - \cos\alpha - f^2\cos\alpha = 0$$
$$f^2\cos\alpha + 2f\sin\alpha - \cos\alpha = 0$$
$$f^2 + 2f\operatorname{tg}\alpha - 1 = 0$$
$$2f\operatorname{tg}\alpha = 1 - f^2$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1-f^2}{2f}$$

131. Es ist die zum Einrücken einer Friktionskupplung nötige Kraft zu ermitteln. Gegeben sind der Radius der Kupplung r, die zu übertragende Leistung N, die Tourenzahl n, der Winkel α und der Reibungskoeffizient f. Fig. 107.

Auflösung: Durch die Einrückkraft wird auf die Kegelfläche der Kupplung ein spezifischer Druck p, d. h. ein Totaldruck $F \cdot p$ ausgeübt. Derselbe muß

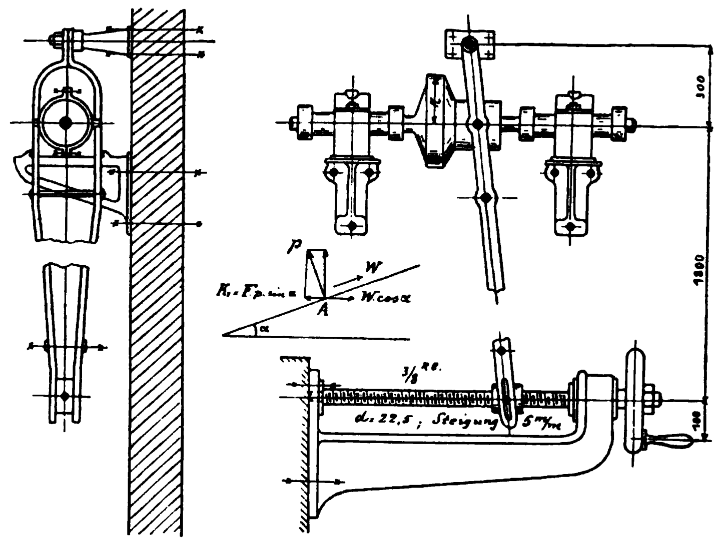


Fig. 107.

erzeugt werden, um erstens die Umfangskraft in der Kupplung, zweitens den Widerstand gegen die Einrückung aufzuheben.

Erstere ist $\frac{M}{r} = f F p$, letzterer $W = f F \cdot p$.

Aus $\frac{M}{r} = f F p$ ergibt sich $p = \frac{M}{f F \cdot r}$.

Um diese Flächenpressung zu erzeugen, ist parallel zur Achsrichtung der Welle die Kraft

$$K_1 = F \cdot p \cdot \sin\alpha \quad \text{oder}$$

$$K_1 = F \cdot \frac{M}{f F r} \sin\alpha = \frac{M}{f r} \sin\alpha$$

nötig. Da auch die Horizontalkomponente von W aufgehoben werden muß, wird

$$K_2 = W \cos\alpha = f F p \cos\alpha = f F \cdot \frac{M}{f F r} \cdot \cos\alpha \quad \text{oder}$$

$$K_2 = \frac{M}{r} \cos\alpha \quad .$$

Daher ist die Einrückkraft

$$K = K_1 + K_2 = \frac{M}{f r} \sin\alpha + \frac{M}{r} \cos\alpha$$

$$K = \frac{M}{f r} (\sin\alpha + f \cos\alpha)$$

laut (81) war $M = 716200 \frac{N}{n}$, somit ist

$$K = \frac{716200 \cdot N}{f r n} (\sin\alpha + f \cos\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (84)$$

§ 32. Zapfenreibung.

a) Am zylindrischen Tragzapfen.

Da die Reibung am zylindrischen Tragzapfen nur eine spezielle Art der gleitenden Reibung ist, gelten für jene dieselben Gesetze wie für diese; es ist dann $W = \varphi \cdot N$, wenn φ der **Zapfenreibungskoeffizient ist.**

φ beträgt je nach der Güte des Schmiermittels $0{,}014 \div 0{,}1$.

Der Zapfenreibungswiderstand wirkt in der Richtung der Tangente an den Zylindermantel, mithin ist sein Moment in bezug auf die Drehachse

$$M = W \cdot r = \varphi \cdot N \cdot r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (85)$$

Die zur Überwindung der Reibung nötige mechanische Arbeit ist gleich Widerstand mal Weg, also während einer Umdrehung des Zapfens

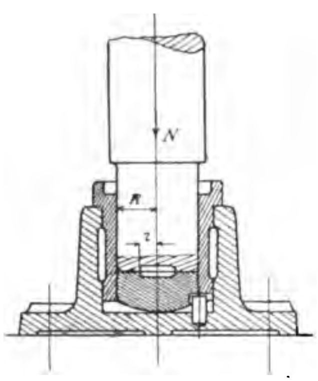
$$W \cdot s = W \cdot 2\,r\,\pi = 2\,\pi\,r \cdot \varphi\,N,$$

folglich, wenn n die Tourenzahl bezeichnet, innerhalb einer Sekunde

$$E = \frac{2\,\pi}{60} \cdot r\,\varphi\,N\,n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (86\,a)$$

Wird r in Metern und N in kg ausgedrückt, so ergibt sich E in mkg/sek. In PS wird

$$E = \frac{2\,\pi}{60 \cdot 75}\,r\,\varphi\,N\,n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (86\,b)$$



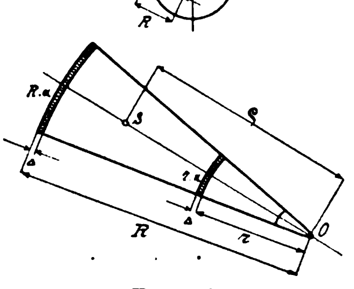


Fig. 108.

b) Am zylindrischen Spurzapfen.

Die Reibung des Spurzapfens auf seiner Unterlage ist ebenfalls eine Art gleitender Reibung; die Formel (82) findet somit auch hier Anwendung.

Das Moment der Reibung ist indes von dem am Tragzapfen verschieden.

In Fig. 108 sei ein ebener Ringspurzapfen mit dem äußeren Halbmesser R und dem innern r vorausgesetzt. Für einen neuen Zapfen ist die Annahme, daß sich der Druck gleichmäßig auf die Unterstützungsspurplatte verteile, erlaubt. Der Druckmittelpunkt in einem Ringstückchen hat von der Achse den Abstand laut (57)

$$\varrho = \frac{2}{3} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha^0} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$$

Da α sehr klein und

$$\frac{180}{\pi} \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha^0} = \frac{\sin\alpha}{\widehat{\alpha}} \sim 1$$

ist, ergibt sich

$$\varrho = \frac{2}{3} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$$

Demnach wird das Reibungsmoment

$$M = \frac{2}{3} \varphi N \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (87)$$

Ist die Unterstützungsfläche eine volle Kreisfläche, dann wird

$$M = \frac{2}{3} \varphi N \cdot R \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (88)$$

Die pro Sekunde verbrauchte Arbeit zur Überwindung des Reibungswiderstandes beträgt beim Ringspurzapfen

$$E = \varphi \cdot N \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \cdot \pi \frac{n}{60 \cdot 75} \text{ PS oder}$$

$$E = \frac{\pi}{45 \cdot 75} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \varphi N n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (89)$$

Beim vollen Spurzapfen dagegen ist diese

$$E = \frac{\pi}{45 \cdot 75} \cdot R \varphi N n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (90)$$

Die Erfahrung hat gezeigt, daß bei eingelaufenen Zapfen der Druck auf die Flächeneinheit umgekehrt proportional der Geschwindigkeit, also auch umgekehrt proportional der Entfernung vom Zapfenmittelpunkte ist. Ist der Druck nun außen p_a, innen p_i, so gilt

$$\frac{p_a}{p_i} = \frac{r}{R}$$

Wird nun ein kleines Ringstückchen in lauter konzentrische Streifen von unendlicher kleiner Breite $\triangle$ zerlegt, so ist der Druck auf den äußersten Streifen $p_a \cdot R \cdot \alpha \cdot \triangle$, auf den innersten $p_i \cdot R \cdot \alpha \cdot \triangle$. — Da aber laut obiger Gleichung $p_a \cdot R = p_i \cdot r$ ist, folgt, daß die äußersten und innersten Streifen gleiche Drücke aufnehmen. Dasselbe gilt auch für alle andern Streifen, so daß die Mittelkraft aller Drücke also von der Drehachse den Abstand

$$\varrho = \frac{R + r}{2}$$

haben muß. Das Reibungsmoment bei dem eingelaufenen Ringspurzapfen erhält somit den Wert

$$M = \varphi N \cdot \frac{R + r}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (91)$$

bei dem vollen Zapfen hingegen

$$M = \frac{1}{2} \varphi N \cdot R \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (92)$$

Die pro Sekunde zur Überwindung des Reibungswiderstandes am eingelaufenen Ringspurzapfen nötige Arbeit wird

$$E = \varphi \cdot N \cdot 2\pi \cdot \frac{n}{60 \cdot 75} \text{ PS oder}$$

$$E = \varphi N (R + r) \frac{\pi n}{60 \cdot 75} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (93)$$

am eingelaufenen, vollen Spurzapfen dagegen

$$E = \varphi N \cdot R \frac{\pi n}{60 \cdot 75} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (94)$$

Beispiele.

132. Eine Welle, die eine 100 kg schwere Scheibe aufnimmt, ist mittels zweier Tragzapfen mit dem Durchmesser $d = 60$ mm gelagert. Welche Leistung geht durch Reibung in den Lagern verloren, wenn die Welle $n = 120$ Touren macht und der Reibungskoeffizient $\varphi = 0{,}1$ ist?

Auflösung:
$$E = \frac{2\pi}{60 \cdot 75} \cdot r \varphi N n$$
$$E = \frac{2\pi \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}1 \cdot 100 \cdot 120}{60 \cdot 75}$$
$$E = 0{,}05 \text{ PS}$$

133. Der Druck auf einen Tragzapfen beträgt N kg — Die Tourenzahl des Zapfens ist n — Wie lang muß der Zapfen sein, damit die Reibungsarbeit höchstens 1 mkg/qcm werde? $\varphi = 0{,}05 = \frac{1}{20}$.

Auflösung: Der Flächendruck des Zapfens ist
$$q = \frac{N}{dl}$$

Die Reibungsarbeit pro Sekunde wird
$$a = \varphi \frac{N}{dl} \cdot \frac{d\pi n}{60} = \varphi \frac{N}{l} \cdot \frac{\pi n}{60}$$
$$1 \text{ mkg/qcm} = 1000 \text{ mmkg/100 qmm} = 10 \text{ mmkg/1 qmm}$$
$$a \leqq 10 \text{ mmkg/1qmm}$$
$$\varphi \frac{N}{l} \cdot \frac{\pi n}{60} = 10$$
$$l = \varphi \frac{N \cdot \pi n}{600} \sim \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{200} Nn$$
$$l \sim \frac{1}{4000} N \cdot n \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (95)$$

134. Eine schmiedeeiserne, runde Welle soll eine Leistung von N PS bei n Touren übertragen. Ihr Durchmesser ist $d = 0{,}12 \sqrt[3]{\frac{N}{n}}$ Meter, ihre Länge l Meter. — Der wievielte Teil der Leistung geht durch Reibung in ihren Lagern verloren, wenn $\varphi = 0{,}05$ ist und das spezifische Gewicht für Schmiedeeisen rund mit $\gamma = 8$ kg/cdm angenommen wird?

Auflösung: Das Gewicht der Welle in kg ist
$$G = \left(\frac{d^2\pi}{4} \cdot l \cdot \gamma\right) \text{kg}$$

In dieser Rechnung werden alle Maße auf Meter und kg bezogen.

Der Effektsverlust, in mkg/sek gemessen, wird

$$E = \frac{2\pi}{60} \cdot r\,\varphi\,G\,n$$

$$E = \frac{2\pi}{60} \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{d^2\pi}{4}\,l\,\gamma\,n$$

$$E = \frac{\pi}{60 \cdot 80} \cdot 0{,}12^3 \cdot \frac{N}{n} \cdot l\,\gamma\,n$$

$$E = \frac{\pi^2 \cdot 0{,}12^3}{60 \cdot 80} \cdot 8000 \cdot Nl$$

$$E = \frac{\pi^2 \cdot 0{,}001728 \cdot 10}{6} = 0{,}0288\,Nl$$

$$\boldsymbol{E \sim 0{,}03\,Nl} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (96)$$

D. h. pro 1 m Wellenlänge gehen $\frac{3}{100}N$ mkg/sek verloren?

Für $N = 50$ PS und $l = 100$ m ergibt sich z. B.

$$E = \frac{0{,}03 \cdot 50 \cdot 100}{75} = 2 \text{ PS}$$

135. Der volle, ebene Stützzapfen einer vertikal geachsten Turbine, welche 246 PS bei 46 Touren überträgt, muß einen Druck von 10000 kg aufnehmen und hat einen Durchmesser von 170 mm. Wie groß ist die durch Reibung verloren gehende Leistung und wie viele Prozente der Gesamtleistung der Turbine beträgt sie a) wenn der Zapfen eingelaufen, b) wenn er neu ist? $\varphi = 0{,}08$.

Auflösung: a)

$$E = \varphi N R \frac{\pi n}{60 \cdot 75}$$

$$E = \frac{0{,}08 \cdot 10000 \cdot 0{,}085 \cdot \pi \cdot 46}{60 \cdot 75}$$

$$\boldsymbol{E \sim 2{,}18 \text{ PS}}$$

$$218 : 246 = 0{,}89, \text{ d. h.}$$

es gehen durch Reibung **0,89 %** der Gesamtleistung der Turbinen verloren.

b)

$$E = \frac{\pi}{45 \cdot 75} \cdot R \varphi N n$$

$$E = \frac{\pi \cdot 0{,}085 \cdot 0{,}08 \cdot 10000 \cdot 46}{45 \cdot 75}$$

$$\boldsymbol{E \sim 2{,}9 \text{ PS}}$$

$$290 : 246 = 1{,}18, \text{ d. h.}$$

der Verlust beträgt beim neuen Zapfen 1,18 % der Gesamtleistung.

136. Der Ringspurzapfen einer vertikal geachsten Turbine hat 430 mm äußeren und 300 mm inneren Durchmesser. Der Druck auf ihn beträgt 20635 kg. Die Turbine hat 1250 PS bei 120 Touren zu übertragen. Wie groß ist der durch Reibung verloren gehende Effekt, wenn vorausgesetzt wird, daß der Zapfen eingelaufen und $\varphi = 0{,}08$ ist?

Auflösung:
$$E = \varphi N (R + r) \frac{\pi n}{60 \cdot 75}$$
$$E = 0{,}08 \cdot 20635 \cdot (0{,}215 + 0{,}15) \frac{\pi \cdot 120}{60 \cdot 75}$$
$$\mathbf{E \sim 5{,}05\ PS}$$
$$505 : 1250 = 0{,}405$$
Der Effektsverlust ist **0,405%** der Gesamtleistung.

§ 33. Das Bremsdynamometer oder der Prony'sche Zaum.

Die Zapfenreibung kann benutzt werden, um mittels einer geeigneten Vorrichtung, dem Bremsdynamometer oder Prony'schen Zaum, Fig. 109, den Effekt einer Arbeitsmaschine zu messen.

Diese Vorrichtung besteht aus einem langen **Gewichtshebel**, an dessen einem Ende mittelst fester Schrauben zwei segmentförmig ausgeschnittene

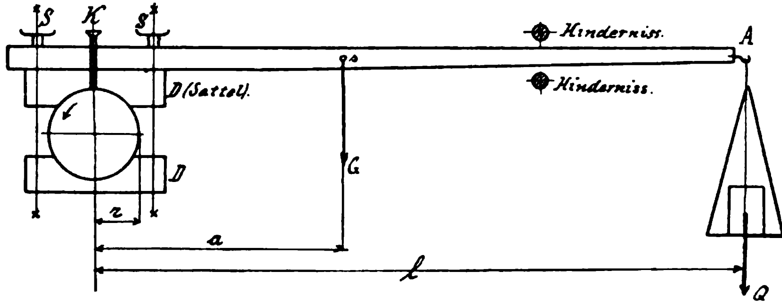


Fig. 109.

Backen (Sättel) befestigt sind und an dessen anderem Ende eine **Wagschale** hängt. Um ein Herumschleudern des Hebels zu verhindern, wird ober- und unterhalb desselben in der Nähe der Wagschale je ein festes **Hindernis** angebracht.

Die Anwendung des Zaumes ist folgende. Die Welle der Arbeitsmaschine wird von der der Kraftmaschine losgekuppelt und der Zaum auf letztere aufgebracht, wobei die Schrauben S noch nicht fest angezogen sind. Wird nun die Kraftmaschine in Gang gesetzt, so sucht ihre Welle den Zaum, in vorliegendem Falle nach links, mitzunehmen, was aber durch die feste Schwelle verhindert wird. Die Schrauben werden nun so lange angezogen, bis die Kraftmaschine ihre Tourenzahl n hat, d. h. jene Tourenzahl, welche sie früher für die Arbeitsmaschine hatte. Die Reibung des Bremszaumes verzehrt nun ebensoviel Arbeit wie die Kraftmaschinenwelle an die Arbeitsmaschinenwelle abzugeben hat.

Die Gewichtsschale wird nun mit Gewichten versehen, bis der Hebel horizontal liegt. Dann ist das Moment der Zapfenreibung gleich dem der Gewichte, also gilt
$$W \cdot r = Q \cdot l, \text{ somit}$$
$$W = Q \frac{l}{r}$$

Die Arbeit des Widerstandes pro Sekunde und auch die Leistung der Maschine wird dann

$$N = W \cdot \frac{2r\pi n}{60 \cdot 75} = Q\frac{l}{r} \cdot \frac{2r\pi n}{60 \cdot 75} \text{ oder}$$

$$N = \frac{\pi}{30 \cdot 75} Qln \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (97)$$

Um einer zu großen Erhitzung der Welle und der Backen vorzubeugen, wird durch den Kanal K stets Seifenwasser zugeführt.

In Q ist auch das Gewicht der Wagschale und das auf deren Aufhängepunkt reduzierte Zaumgewicht P einbegriffen. — Ist nämlich das Zaumgewicht G kg, dann gilt $G \cdot a = Pl$ und

$$P = G\frac{a}{l}$$

Der Abstand a kann durch Ausbalancieren des Zaumes versuchsweise ermittelt werden. Sonach ist P auch bestimmt.

Die letztere Operation kann gespart werden, wenn man den Hebel über die Backen hinaus soweit verlängert, daß sein Schwerpunkt vertikal über das Wellenmittel zu liegen kommt.

Bei vertikal stehender Welle kann der Zaum ebenfalls zweckentsprechend benutzt werden, der Endpunkt A muß aber genau horizontal geführt sein, da sonst eine Verdrehung der ganzen Bremse eintreten würde. Q kann dann durch ein Gewicht gemessen werden, welches an einem über eine feste Rolle geleiteten Seile hängt. Das Seilstück von A bis zur Rolle muß senkrecht zum Hebel und genau horizontal sein. — Auch eine Federwage kann zur Messung von Q herangezogen werden.

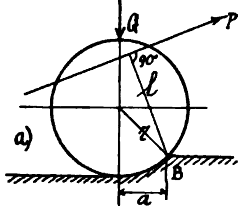
Mittels des Prony'schen Zaumes kann die Leistung der Kraftmaschine bei jeder beliebigen Tourenzahl bestimmt werden, was in der Praxis von hochbedeutender Wichtigkeit ist.

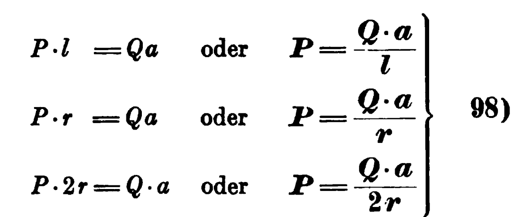
Ist der Durchmesser der Kraftmaschinenwelle klein, so nimmt man gußeiserne Bremsringe.

Je kleiner die Tourenzahl der Welle und je größer die von ihr übertragene Leistung ist, desto größer wird der Durchmesser der Bremsbackenausnehmung genommen.

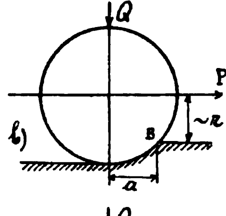
§ 34. Die rollende Reibung oder Wälzungswiderstand.

Die rollende Reibung tritt auf, wenn ein zylindrischer Körper auf einer Unterlage fortrollt. Der Unterschied gegen die gleitende Reibung ist der, daß der Körper mit immer neuen Teilen der Unterlage in Berührung kommt. Das Auftreten der rollenden Reibung kann man so erklären, daß man annimmt, der Körper drücke die Unterlage auf der Breite a ein, Fig. 110a. — Um nun denselben gleichmäßig fortzurollen, bedarf es einer gewissen Kraft P, deren Moment um die Kippkante B genau so groß sein muß, wie das Moment des Körpergewichtes in bezug auf B. — a heißt der **Hebelarm der rollenden Reibung** und beträgt für Eisen auf Eisen 0,05 cm, ebensoviel für Hartholz auf Hartholz, für gewöhnliches Holz auf gewöhnlichem Holz 0,1 cm, für Stein auf Stein (gut gepflasterte oder gut geschotterte Straßen) 0,15 cm. — In den Fällen a), b) und c) gilt dann





$$\left.\begin{aligned} P\cdot l &= Qa \quad \text{oder} \quad P=\frac{Q\cdot a}{l} \\ P\cdot r &= Qa \quad \text{oder} \quad P=\frac{Q\cdot a}{r} \\ P\cdot 2r &= Q\cdot a \quad \text{oder} \quad P=\frac{Q\cdot a}{2r} \end{aligned}\right\} \quad 98)$$



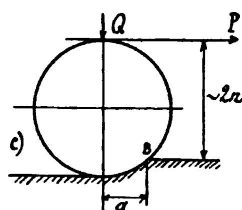


Fig. 110.

Die zur Fortbewegung von Fahrzeugen nötige Kraft P indes bestimmt sich nicht mehr so einfach. Wirkt P, Fig. 111, die Wagenachse ziehend, so hat das Moment von P gleich zu sein dem Momente der rollenden Reibung plus dem Momente der Zapfenreibung. Demnach wird

$$P\cdot\frac{D}{2}=Qa+\varphi Q\frac{d}{2}$$

$$P=\frac{Qa+\varphi Q\frac{d}{2}}{\frac{D}{2}}=Q\frac{a+\varphi\frac{d}{2}}{\frac{D}{2}}$$

Die Größe $k=\frac{a+\varphi\frac{d}{2}}{\frac{D}{2}}$ heißt der **Koeffizient der Gesamtreibung für Fahrzeuge.** Somit ist

$$\left.\begin{aligned} P &= k\cdot Q, \\ \text{wenn } k &= \frac{a+\varphi\frac{d}{2}}{\frac{D}{2}} \end{aligned}\right\} \ldots (99)$$

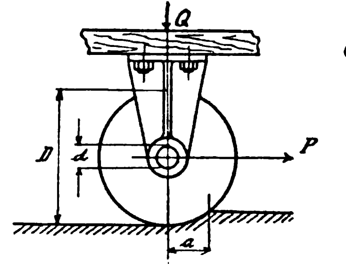


Fig. 111.

Werte von Reibungskoeffizienten (Koeffizienten der gleitenden, rollenden und der Zapfenreibung sowie der Gesamtreibung für Fuhrwerke) sind in des Ingenieurs Taschenbuch „Hütte“ und auch in Ingenieurkalendern enthalten.

Die wälzende oder rollende Reibung ist natürlich kleiner als die gleitende und auch kleiner als die Zapfenreibung. Man kann dies an jedem auf Rädern laufenden Fahrzeuge oder an jedem auf untergelegten Walzen fortbewegten Körper erkennen.

Beispiele.

137. Wie groß muß die durch die Achse einer 200 kg schweren, gußeisernen Walze von 40 cm Durchmesser gehende Kraft P sein, damit sie diese Walze auf gußeisener Bahn gleichförmig fortbewege?

Auflösung:

$$P=Q\frac{a}{r}=200\cdot\frac{0{,}05}{20}$$

$$P\sim 0{,}5 \text{ kg}$$

138. Ein 300 kg schwerer Körper soll mittels zweier, je 20 kg schwerer, hölzerner Walzen und auf denselben liegender Holzplatte, deren Gewicht in dem Körpergewicht einbegriffen ist, auf Steinpflaster fortgeschafft werden. Wie groß muß die an der Platte wirkende, horizontale Kraft P sein, wenn der Hebelarm der rollenden Reibung zwischen Holz und Steinpflaster 0,75 und derjenige zwischen Holz und Holz 0,1 cm ist?

Auflösung: Die Reibung zwischen Platte und Walzen ist

$$P_1 = \frac{0,1}{15} \cdot 300$$

Die Reibung zwischen Walzen und Unterlage wird

$$P_2 = \frac{0,75}{15} \cdot (300 + 40)$$

Demnach ergibt sich

$$P = P_1 + P_2 = \frac{0,1}{15} \cdot 300 + \frac{0,75}{15} \cdot 340$$

$$P = 2 + 0,05 \cdot 340$$

$$\mathbf{P \sim 19\ kg}$$

139. Welche Zugkraft ist notwendig, um einen Wagen, welcher samt Belastung 2500 kg wiegt, auf chaussierter Straße (in gutem Zustande) fortzubewegen? $k = 0,023$.

Auflösung: $$P = 0,023 \cdot 2500$$

$$\mathbf{P \sim 57\ kg}$$

§ 35. Der Hebel.

Unter einem Hebel versteht man eine unbiegsame Stange, welche von mehreren Kräften um einen Punkt, den sogenannten **Unterstützungspunkt,** gedreht wird. Unter **Hebelarm** versteht man die Entfernung des Angriffspunktes einer Kraft vom Unterstützungspunkte. Ein **mathematischer Hebel** ist ein solcher, dessen Gewicht als Null angenommen wird; ein **physischer Hebel** ein solcher, dessen Gewicht berücksichtigt werden muß. Ein **einarmiger Hebel,** Fig. 112a, ist derjenige, an welchem die Kräfte nur auf einer Seite des Unterstützungspunktes angreifen; ein **zweiarmiger Hebel** ist ein solcher, an welchem die Kräfte beiderseits desselben wirken, Fig. 112b. — Fallen alle Hebelarme in eine gerade Linie, so heißt der Hebel ein **gerader Hebel,** bilden die Hebelarme einen Winkel, so heißt er **Winkelhebel,** Fig. 112c.

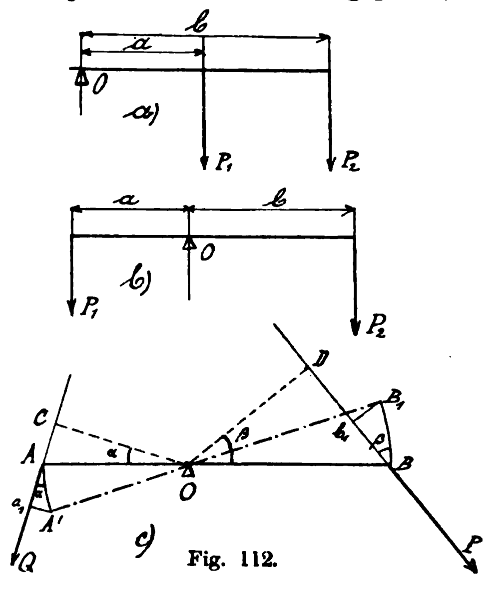


Fig. 112.

„Gleichgewicht an einem Hebel ist vorhanden, wenn die Summe der statischen Momente aller vorhandenen äußeren Kräfte in bezug auf den Unterstützungspunkt gleich Null wird.“

Ein Hebel, Fig. 112c, an dem die Kräfte P und Q angreifen, sei im Gleichgewicht. Wird er um den Unterstützungspunkt ein wenig gedreht, so daß A nach A' und B nach B' kommt, dann ist die von P geleistete Arbeit $P \cdot \overline{Bb_1}$, — die von Q geleistete $Q \cdot \overline{Aa_1}$. — Hierbei ist $\overline{A'a_1} \perp Q$ und $\overline{B'b_1} \perp P$.

Da die Bögen AA' und BB' sehr klein sind, können sie als Gerade angenommen werden. Deshalb folgt

$$\overline{Aa_1} = AA_1 \cdot \cos\alpha$$
$$\overline{Bb_1} = BB_1 \cdot \cos\beta$$

Die Arbeiten der Kräfte P und Q sind dann

$$P \cdot \overline{Bb_1} = P \cdot BB_1 \cos\beta = P \cdot BB_1 \cdot \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}}$$

$$Q \cdot \overline{Aa_1} = Q \cdot AA_1 \cdot \cos\alpha = Q \cdot AA_1 \cdot \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}$$

Nun ist $P \cdot \overline{OD} = Q \cdot \overline{OC}$ und $\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$ oder $\frac{AA_1}{\overline{OA}} = \frac{BB_1}{\overline{OB}}$

Daher ergibt sich

$$P \cdot \overline{Bb_1} : Q \cdot \overline{Aa_1} = P \cdot BB_1 \cdot \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}} : Q \cdot AA_1 \cdot \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}$$

$$= P \cdot \overline{OD} \cdot \frac{BB}{\overline{OB}} : Q \cdot \overline{OC} \cdot \frac{AA_1}{\overline{OA}} \quad \text{oder}$$

$$\boldsymbol{P \cdot \overline{Bb_1} = Q \cdot \overline{Aa_1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(100a)}$$

Die letzte Gleichung läßt sich auch in der Form schreiben:

$$\boldsymbol{P \cdot \overline{Bb_1} - Q \cdot \overline{Aa_1} = 0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(100b)}$$

„Die algebraische Summe der Arbeiten, welche während eines kleinen Zeitteilchens die an dem Hebel wirkenden und sich das Gleichgewicht haltenden Kräfte verrichten, ist Null.“

„Die kleinen Bewegungen am Hebel (auch an anderen Vorrichtungen) nennt man **virtuelle Bewegungen**, die kleinen Arbeiten **virtuelle Arbeiten.**“ Es läßt sich somit obiger Satz auch folgendermaßen aussprechen:

„Bei virtuellen Verrückungen von Vorrichtungen ist die Summe aller geleisteten Arbeiten Null.“

Man kann die Kräfte verkleinern und ihre Hebelarme vergrößern, so daß dadurch ihre Wirkung ungeändert bleibt.

„Was aber an Kraft gespart wird, geht an Weg verloren. Man nennt dieses Gesetz **die goldene Regel der Mechanik.**“

Beispiele.

140. An dem in Fig. 113 skizzierten Hebel die Gleichgewichtsbedingung aufzustellen. Der Zapfendurchmesser sei r, der Zapfenreibungskoeffizient φ.

Auflösung: Bringt man im Zapfenmittelpunkte zu den Kräften P, Q und G parallele und entgegengesetzt gleiche Kräfte an, so ergeben sich die Kräftepaarmomente $P \cdot a$, $G \cdot c$ und Qb, und der Zapfen erfährt einen Normaldruck N. Letzterer wird als Resultierende aller an ihm angreifenden horizontalen und vertikalen Kräfte bestimmt. Nun ergeben sich die Gleichungen

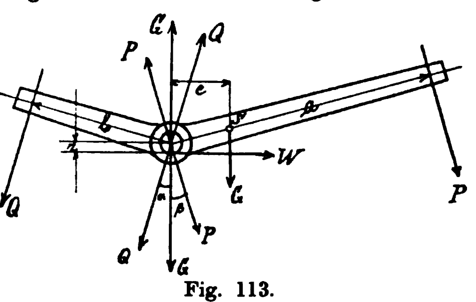


Fig. 113.

$$\Sigma(H) = P \sin\beta - Q \sin\alpha$$
$$\Sigma(V) = G + P \cdot \cos\beta + Q \cos\alpha$$
$$N = \sqrt{[\Sigma(H)]^2 + [\Sigma(V)]^2}$$

Der Zapfenreibungswiderstand wird $\varphi \cdot N$. Die Gleichgewichtsbedingung am Hebelzapfen lautet daher

$$\boldsymbol{P \cdot a + G \cdot c - Q \cdot b +}$$
$$\boldsymbol{+ \varphi \sqrt{(P \sin\beta - Q \sin\alpha)^2 + (G + P \cos\beta + Q \cos\alpha)^2} \cdot r = 0}$$

141. Wie groß muß das Gewicht G des in Fig. 114 gezeichneten Sicherheitventiles gemacht werden, damit letzteres bei einem Kesselüberdrucke von $p = 6$ Atm. geschlossen bleibe? Hierzu noch gegeben das Ventilgewicht

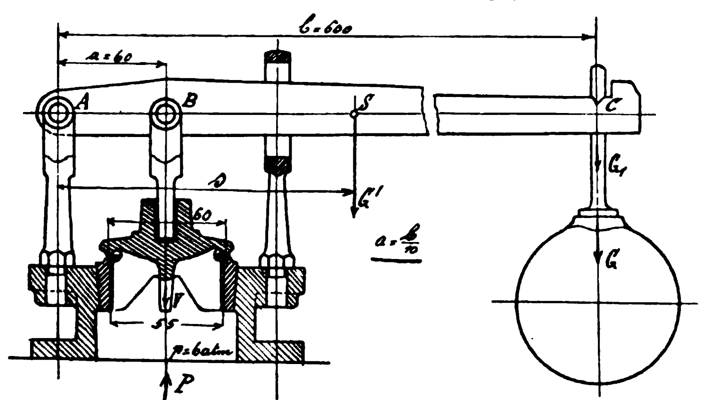


Fig. 114.

$V = 0{,}2$ kg und das auf den Aufhängepunkt des Gewichtes reduzierte Hebelgewicht $G_1 = 1$ kg.

In bezug auf den Drehpunkt A gilt

$$V \cdot a - P \cdot a + (G + G_1)\,b = 0$$
$$G + G_1 = P \cdot \frac{a}{b} - V \cdot \frac{a}{b}$$
$$G = P \cdot \frac{a}{b} - V \cdot \frac{a}{b} - G_1$$
$$G = \frac{a}{b}\left(\frac{\pi}{4} d^2 p - V\right) - G_1$$
$$G = \frac{60}{600}\left(\frac{\pi}{4}\, 5{,}5^2 \cdot 6 - 0{,}2\right) - 1$$
$$\boldsymbol{G \sim 13\ \text{kg}}$$

§ 36. Die Wagen.

Die Wagen beruhen auf dem Gesetze des Hebels. Sie dienen für Ermittlung des Gewichtes von Körpern.

a) **Die gleicharmige Wage.** Sie besteht aus einem gleicharmigen Hebel, an dessen Endpunkten die Wagschalen aufgehängt sind, Fig. 115.

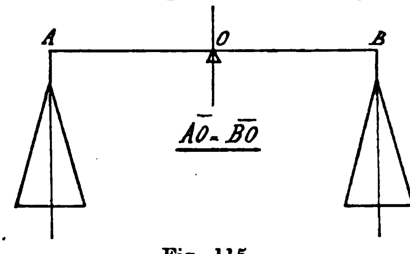


Fig. 115.

Die Anforderungen, welche an eine gute Wage gestellt werden, sind:

α) Sie muß **richtig** sein, d. h. bei gleicher Belastung der gleich schweren Wagschalen muß der Waghebel horizontal liegen. Das ist nur der Fall, wenn derselbe symmetrisch ausgeführt ist. Der Drehpunkt des Wagbalkens muß mit den Aufhängepunkten der Schalen theoretisch in einer Geraden liegen.

β) Die Wage muß sich **in sicherem Gleichgewichte** befinden. Dies trifft zu, wenn ihr Schwerpunkt vertikal unter dem Aufhängepunkt des Wagebalkens liegt.

γ) Die Wage muß **empfindlich** sein, d. h. bei jeder beliebigen Belastung derselben muß ein in eine Wagschale gelegtes, kleines Übergewicht einen Ausschlag der letzteren hervorrufen. „**Empfindlichkeit** ist nun das Verhältnis aus dem den Ausschlag hervorrufenden, kleinen Übergewicht und der Belastung der Wage.“

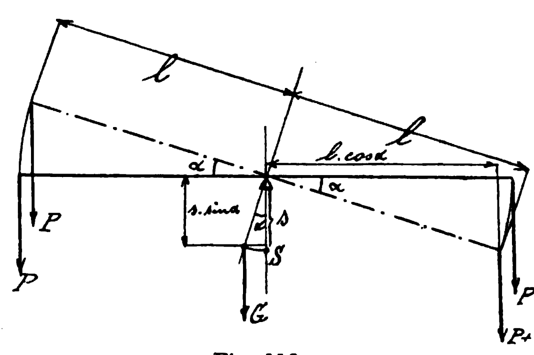


Fig. 116.

In Fig. 116 sei das Übergewicht q. Dann stellt sich die Achse des Wagbalkens gegen ihre ursprüngliche Lage unter dem Winkel α ein. Es ist somit

$$(P + q)\, l \cos\alpha = G \cdot s \sin\alpha + P \cdot l \cos\alpha$$

$$q\, l \cos\alpha = G \cdot s \cdot \sin\alpha$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= \frac{q\, l}{G \cdot s} \\ \text{und} \quad q &= \frac{G \cdot s \cdot \operatorname{tg}\alpha}{l} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (101)$$

Der Ausschlagwinkel α wird um so größer, d. h. die Wage um so empfindlicher, je geringer das Gewicht der Wage und je größer der Arm des Wagebalkens ist, ferner je weniger tief der Schwerpunkt sich unter dem Aufhängepunkt befindet.

Um den ersten beiden Bedingungen zu genügen, wird der Wagebalken durchbrochen ausgeführt.

Es seien $G = 2$ kg, $s = 1$ mm, $\alpha = 1^0$ ($\operatorname{tg} \alpha \sim 0{,}02$) und $l = 500$ mm, ferner $P = 10$ kg.

Dann wird $q = \frac{2000 \cdot 1 \cdot 0{,}02}{500}$ Gramm $= 0{,}08$ Gramm.

Demnach wird die Empfindlichkeit der Wage

$$E = \frac{0{,}08}{10000} = \frac{8}{1000000}$$

$$\boldsymbol{E \sim \frac{1}{125000}}$$

Um mit einer unrichtigen Wage doch richtig wägen zu können, bedient man sich entweder der Methode von **Borda** oder derjenigen von **Gauß.**

Methode von Borda. Man lege den Körper auf die eine Wagschale und stelle durch Auflegen von Tara auf die andere Gleichgewicht her. Dann ersetze man den Körper durch Gewichte. Letztere ergeben dann seine Schwere.

Methode von Gauß. Der Körper wird zuerst in die linke Wagschale, Fig. 117, gelegt und durch in die rechte gelegte Gewichte von der Größe P_1 gewogen. Dann ist

$$K \cdot a = P_1 \cdot b$$

Hierauf wird der Körper in die rechte Wagschale gelegt und werden links Gewichte aufgelegt, bis die Wage ins Gleichgewicht gelangt. Dann wird

$$K \cdot b = P_2 \cdot a$$

Fig. 117.

Durch Multiplikation der beiden Gleichungen ergibt sich

$$K^2 \cdot ab = P_1 \cdot P_2 \cdot ab \quad \text{oder}$$

$$\boldsymbol{K = \sqrt{P_1 \cdot P_2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(102a)}$$

Da

$$\left(\frac{P_1 + P_2}{2}\right)^2 = \frac{P_1^2 + 2 P_1 P_2 + P_2^2}{4} \quad \text{und}$$

$$\left(\frac{P_1 - P_2}{2}\right)^2 = \frac{P_1^2 - 2 P_1 P_2 + P_2^2}{4} \quad \text{ist, folgt}$$

$$\sqrt{\left(\frac{P_1 + P_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{P_1 - P_2}{2}\right)^2} = \sqrt{P_1 \cdot P_2} = K$$

Wegen der Kleinheit von $\left(\frac{P_1 - P_2}{2}\right)^2$, kann annähernd geschrieben werden

$$\boldsymbol{K \sim \frac{P_1 + P_2}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(102b)}$$

„Das richtige Körpergewicht ist annähernd das arithmetische Mittel aus beiden Wägegewichten."

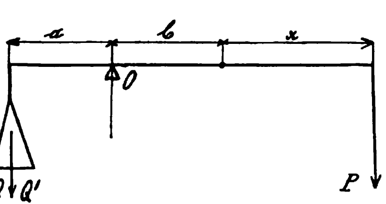


Fig. 118.

b) **Die Schnellwage.** Fig. 118. Sie besteht aus einem ungleicharmigen Hebel, an dessen längerem Arm ein verschiebbares Gewicht und an dessen anderem Arm eine Wagschale angebracht ist. Ist Q' das Ge-

wicht der letzteren und P die Größe des verschiebbaren Gewichtes, so ist bei leerer Wageschale der Hebel horizontal, wenn

$$Q' \cdot a = P \cdot b$$

ist. Daraus kann b bestimmt werden. Der Anfangspunkt der Teilung liegt somit fest. Wird nun in die Wagschale das Gewicht Q gelegt, so muß P z. B. um x nach rechts geschoben werden, damit der Wagbalken wieder horizontal bleibe. Es ergibt sich dann

$$P(x + b) = (Q + Q') \cdot a$$

$$P \cdot x + P \cdot b = Q \cdot a + Q' \cdot a$$

$$P x = Q \cdot a$$

$$Q = \frac{P \cdot x}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (103)$$

Die Skala am Wagbalken wird empirisch (auf Grund von Versuchen) angefertigt.

Jeder Teilstrich am längeren Wagarm gibt sofort das Gewicht des zu wägenden Körpers an.

c) **Die Zeigerwage.** Fig. 119. Sie wird hauptsächlich zur Wägung leichter Körper (Briefe u. dgl.) benutzt. In einem Ständer ist der Drehpunkt O eines dreiarmigen Winkelhebels gelagert, dessen oberster Arm bei mittlerer Belastung horizontal liegt. Der Schwerpunkt S des Winkelhebels befindet sich vertikal unter dem Drehpunkte O, wenn die Wage unbelastet ist. Zwischen den beiden andern Winkelhebelarmen ist eine bogenförmige Skala angebracht; die auf ihre Teilung zeigende Marke ist am Ständer festgemacht. Eine Stange $\overline{AC}$, welche durch die Kurbel $\overline{O_1C}$ am Ständer gelenkt und in A mit $\overline{OA}$ gelenkig verbunden ist, nimmt oben die Wagschale auf.

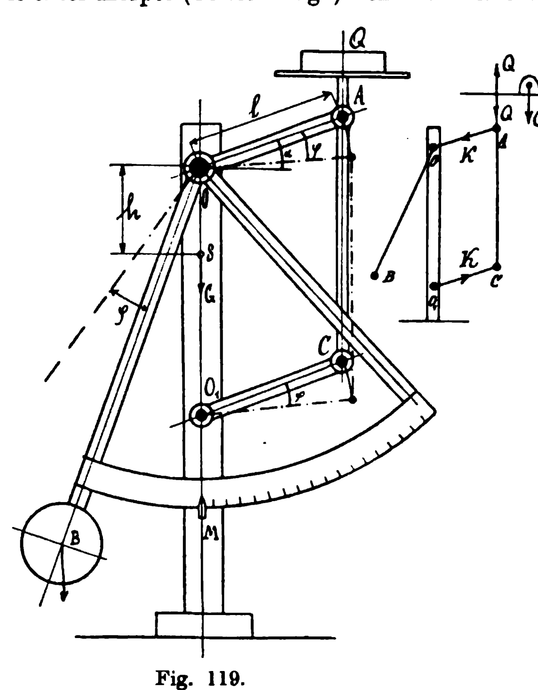


Fig. 119.

Wird in letztere ein Körper vom Gewichte Q gelegt, so dreht sich der Winkelhebel um φ nach abwärts. Nach den Bezeichnungen in Fig. 119 wird dann

$$Q \cdot l \cdot \cos(\alpha - \varphi) = G h \sin \varphi$$

$$Q = G \cdot \frac{h}{l} \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos(\alpha - \varphi)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (104)$$

Aus aufgelegten, bekannten Gewichten Q können die zugehörigen Winkel φ gerechnet werden. Diese aber werden nicht auf der Skala aufgetragen, sondern gleich die entsprechenden Gewichte und zwar von 10 g zu 10 g.

Es ist gleichgiltig, an welcher Stelle der Wagschale die Last liegt. Fügt man in A zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte Q hinzu, so drückt die nach abwärts wirkende den Winkelhebel nieder, während die nach aufwärts wirkende mit der Last Q ein Kräftepaar bildet, dessen Moment durch dasjenige des in den Hebelarmen $\overline{OA}$ und $\overline{O_1C}$ entstehende Kräftepaares aufgehoben wird.

Durch Verlängerung der Hebel $\overline{OA}$ und $\overline{O_1C}$ über O und O_1 hinaus um die Stücke $\overline{OA_1} = \overline{OA}$ und $\overline{O_1C_1} = \overline{OC}$ unter Fortlassung des Hebels $\overline{OB}$, also durch doppelte Anordnung der Parallelogrammkonstruktion, entsteht die sogenannte **Tafelwage**, Fig. 120.

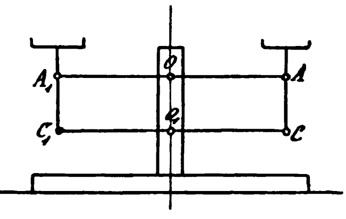


Fig. 120.

d) **Die Dezimalwage.** Fig. 121. Erfunden von Quintenz in Straßburg im Jahre 1821. Sie besteht im wesentlichen aus einem zweiarmigen Hebel, dessen Drehpunkt D_1 in einem Ständer gelagert ist. An dem längeren Arme $\overline{D_1A}$ dieses Wagbalkens hängt eine Wagschale, am kürzeren greifen zwei Zugstangen $\overline{BD}$ und $\overline{CE}$ an.

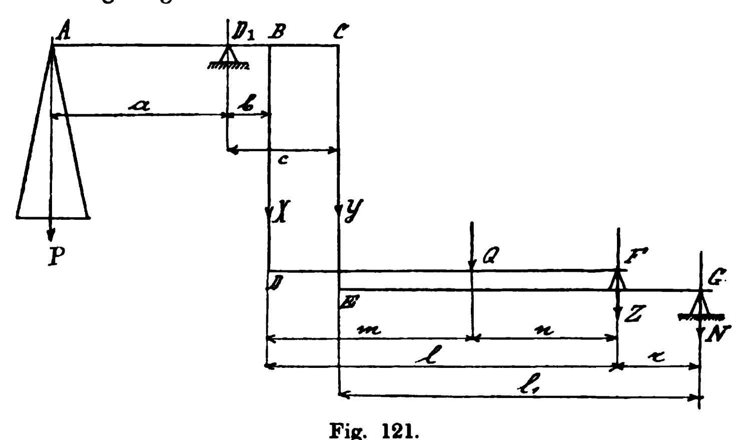


Fig. 121.

An letzteren sind die einarmigen Hebel $\overline{DF}$ und $\overline{EG}$ angehängt. Der erstere dieser Hebel heißt **Brücke.**

Eine auf einer beliebigen Stelle der letzteren befindliche Last bringt in der Zugstange BD die Beanspruchung X und auf die Stütze F den Druck Z hervor. Nun muß sein

$$X \cdot l = Q \cdot n, \text{ daher}$$

$$X = \frac{Q \cdot n}{l} \text{ und}$$

$$Z \cdot l = Q \cdot m, \text{ also}$$

$$Z = \frac{Q \cdot m}{l}$$

Wird Z in Y und N zerlegt, so ergibt sich

$$Y \cdot l_1 = Z \cdot r, \text{ daraus}$$

$$Y = \frac{Z \cdot r}{l_1} = Q \frac{m}{l} \cdot \frac{r}{l_1}$$

Gleichgewicht ist dann vorhanden, wenn die Summe der Momente von X und Y in bezug auf D_1 gleich ist dem Momente von P in bezug auf genannten Drehpunkt. Somit wird

$$P \cdot a = X \cdot b + Y \cdot c$$

$$P \cdot a = Q \cdot \frac{n}{l} \cdot b + Q \frac{m}{l} \cdot \frac{r}{l_1} \cdot c$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{b}{a} \cdot \left[\frac{n}{l} + \frac{m}{l} \cdot \frac{r}{l_1} \cdot \frac{c}{b}\right]$$

Wenn $\frac{r}{l_1} = \frac{b}{c}$, folgt $\frac{P}{Q} = \frac{b}{a}\left(\frac{n}{l} + \frac{m}{l}\right)$ oder

$$\frac{P}{Q} = \frac{b}{a} \cdot \frac{m+n}{l} = \frac{b}{a}, \text{ d. h.}$$

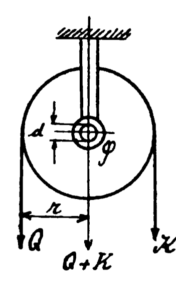
$$P = Q \cdot \frac{b}{a} \text{ für } \frac{r}{l_1} = \frac{b}{c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (105)$$

Wenn demnach $a = 10\,b$ gemacht wird, braucht P nur $^1/_{10}\,Q$ zu sein.

Daß die Brücke immer horizontal bleibt, geht aus folgender Überlegung hervor. Senkt sich F um x, so senkt sich E um $\frac{l_1}{r}\,x$ und D um $\frac{b}{c} \cdot \frac{l_1}{r} \cdot x$. Da $\frac{b}{c}$ und $\frac{l_1}{r}$ reziproke Werte sind, ist die Senkung des Punktes D ebenfalls x, also genau so groß wie diejenige von F. Das Horizontalbleiben der Brücke ist nötig, da die Wägungen sonst ungenau sein würden.

§ 37. Rollen.

a) Die feste Rolle.



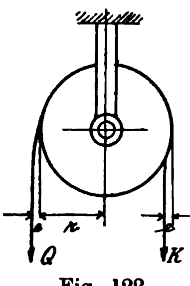


Fig. 122.

In folgendem werde die Bedingung des Gleichgewichtes an einer festen Rolle mit Rücksicht auf alle vorhandenen Widerstände abgeleitet. Hierzu Fig. 122.

α) **Der Einfluß des Zapfenreibungswiderstandes.** Das Reibungsmoment am Zapfen ist

$$M = \varphi\,(Q + K) \cdot \frac{d}{2}$$

Demnach ist zur Überwindung der Reibung am Umfang der Rolle die Kraft

$$\frac{M}{r} = \frac{Q+K}{2\,r} \cdot \varphi\,d$$

nötig, welcher durch $K - Q$ das Gleichgewicht gehalten werden muß.

$$\frac{M}{r} = \frac{Q+K}{2r} \cdot \varphi d = K - Q$$

$$K \cdot 2r - Q \cdot 2r = K\varphi d + Q\varphi d$$

$$K(2r - \varphi d) = Q(2r + \varphi d)$$

$$\frac{K}{Q} = \frac{2r + \varphi d}{2r - \varphi d} = \frac{1 + \frac{\varphi d}{2r}}{1 - \frac{\varphi d}{2r}}$$

$$\frac{K}{Q} = \frac{1 + \varphi \frac{d}{r} + \left(\frac{\varphi d}{2r}\right)^2}{1 - \left(\frac{\varphi d}{2r}\right)^2} \sim 1 + \varphi \frac{d}{r}$$

Die Quadrate können nämlich ihrer Kleinheit halber vernachlässigt werden. Demnach beträgt die Zapfenreibung

$$Z = Q \cdot \varphi \frac{d}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (106)$$

β) **Der Seilwiderstand.** Wird ein Seil aus gerader Richtung in eine Bogenrichtung übergeführt, dann ergibt sich ein Widerstand desselben gegen die Annahme dieser neuen Richtung. Das lastseitige Seilende weicht von der Tangente an die Ablaufstelle um e nach außen, das kraftseitige von der Tangente an die Anlaufstelle um e nach innen ab. Daher wird

$$K(r - e) = Q(r + e)$$

$$\frac{K}{Q} = \frac{r+e}{r-e} = \frac{1 + \frac{e}{r}}{1 - \frac{e}{r}} \sim 1 + \frac{e}{2r}$$

Der Seilwiderstand ergibt sich mit

$$B = Q \frac{2e}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (107\text{a})$$

Nach Versuchen ist, wenn δ den Durchmesser des Seiles bedeutet,

$$e = 6{,}5\,\delta^2$$

Demnach läßt sich auch schreiben

$$B = Q \frac{13\,\delta^2}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (107\text{b})$$

Die zum Heben der Last Q mittels einer festen Rolle nötige Kraft wird daher

$$K = Q + Z + B = Q + Q\frac{\varphi d}{r} + Q\frac{13\,\delta^2}{r}$$

$$K = Q\left(1 + \varphi \frac{d}{r} + 13\frac{\delta^2}{r}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (108\text{a})$$

Den Klammerausdruck bezeichnet man mit μ und nennt μ die **Widerstandsziffer für Seilrollen.** Sie beträgt ca. 1,1. Dann wird

$$K = \mu Q = 1{,}1\,Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (108\text{b})$$

Zum Heben von $Q = 100$ kg braucht man an der Seilrolle eine Kraft $K = 110$ kg.

Beim Herablassen einer Last vertauschen K und Q ihre Rollen, so daß folgt

$$Q = \mu \cdot K$$

Z. B. $100 = 1{,}1\ K$, woraus $K = \frac{100}{1{,}1} = 90{,}9$ kg sich ergibt.

Wird statt des Seiles eine Kette benutzt, so entstehen ebenfalls an Ablauf- und Anlaufstelle Widerstände und zwar durch gegenseitiges Verdrehen der benachbarten Kettenglieder. Praktische Versuche ergeben für den **Kettenwiderstand** die Formel

$$W = f \cdot \frac{\delta}{r} Q \qquad \text{. . . . . (109)}$$

wenn $f = 0{,}15$ und δ der Durchmesser des Ketteneisens sind.

Die **Widerstandsziffer für Kettenrollen** wird ca. 1,05. Demnach ist die zum Heben einer Last Q mittels Kettenrolle nötige Kraft

$$K = \mu_1 Q \sim 1{,}05\, Q \qquad \text{. . . . . (110)}$$

Für Drahtseilrollen wird die Widerstandsziffer ca. 1,04. — Daher gilt

$$K = \mu_2 Q \sim 1{,}04\, Q \qquad \text{. . . . . (111)}$$

„Das Verhältnis aus der theoretischen (ideellen) und der wirklichen (effektiven) Zugkraft heißt der **Wirkungsgrad der festen Rolle.**" Derselbe ist also

$$\eta = \frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_2}\right) \qquad \text{. . . . . (112)}$$

b) Die lose Rolle.

In Fig. 123 greife an einer losen Rolle die Last Q an. Ist die zur Hebung derselben nötige Kraft P, so wird das linksseitige Seil durch $\frac{P}{\mu}$ gespannt. Somit ergibt sich

$$P + \frac{P}{\mu} = Q$$

$$P\left(1 + \frac{1}{\mu}\right) = Q \quad \text{und}$$

$$P = \frac{Q}{1 + \frac{1}{\mu}} \qquad \text{. . . . . . . (113)}$$

Fig. 123.

Werden Zapfenreibung und Seil-(Ketten-, Drahtseil-)widerstand vernachlässigt, dann wird die Widerstandsziffer 1 und

$$P = \frac{Q}{2} \qquad \text{. . . . . (113a)}$$

Der **Wirkungsgrad der losen Rolle** folgt sodann mit

$$\eta = \frac{\frac{Q}{2}}{\frac{Q}{1+\frac{1}{\mu}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{1+\frac{1}{\mu}}}$$

$$\eta = \frac{1+\frac{1}{\mu}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (114)$$

Beispiele.

142. Wie groß sind Widerstandsziffer und Wirkungsgrad einer festen Hanfseilrolle, an welcher $r = 80$ mm, $d = 24$ mm, $\delta = 20$ mm und $\varphi = 0{,}15$ betragen?

Auflösung:

$$\mu = 1 + 0{,}15 \frac{0{,}024}{0{,}08} + 13 \frac{0{,}0004}{0{,}08}$$

$$\mu = 1 + 0{,}045 + 0{,}065$$

$$\mu = \mathbf{1{,}11}$$

$$\eta = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{1{,}11}$$

$$\eta = \mathbf{0{,}91}$$

143. Wie groß ist die zum Heben einer Last Q mittels einer losen Drahtseilrolle nötige Kraft P? Wie groß ist der Wirkungsgrad dieser Rolle?

Auflösung:

$$P = \frac{Q}{1+\frac{1}{1{,}04}} = \frac{Q}{1+0{,}96} = \frac{Q}{1{,}96}$$

$$P = \mathbf{0{,}51\,Q}$$

$$\eta = \frac{1+\frac{1}{\mu}}{2} = \frac{1+0{,}96}{2} = \frac{1{,}96}{2}$$

$$\eta = \mathbf{0{,}98}$$

144. In welchem Verhältnisse stehen Kraft und Last an der losen Rolle, Fig. 124, wenn von allen Reibungswiderständen Abstand genommen wird?

Auflösung: Die Last Q zerlegt sich in die Komponenten $\frac{Q}{2\cos\alpha}$ und $\frac{Q}{2\cos\alpha}$

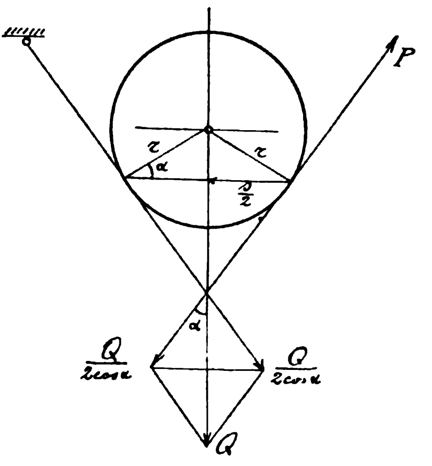


Fig. 124.

Die nötige Kraft P muß dann gleich einer solchen sein. Somit wird

$$\frac{P}{\frac{Q}{2\cos\alpha}} = \frac{P}{Q} \cdot 2\cos\alpha = \frac{P}{Q} \cdot 2 \frac{s}{2r} = \frac{Ps}{Qr}$$

Demnach $P : Q = r : s$, d. h.

„Die Kraft verhält sich zur Last wie der Radius der Rolle zur Sehne des vom Seil umspannten Bogens.“

§ 38. Rollenzüge und Flaschenzüge.

Mit Hilfe der Entwicklungen im letzten Paragraphen ist es möglich, die Kraftverhältnisse an manchen Rollenverbindungen, welche unter dem Namen Rollenzüge und Flaschenzüge in der Praxis angewendet werden, zu beurteilen.

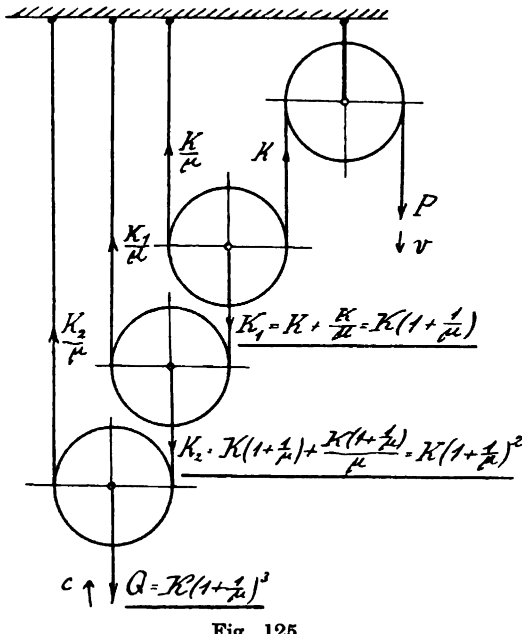


Fig. 125.

„Als einzige Regel hat man nur zu beachten, daß in jedem Falle, wo ein Seil sich um eine Rolle schlingt, die Spannung des ablaufenden (ziehenden) Seiles gleich der μ fachen Spannung des auflaufenden (gezogenen) Seiles ist.“

Zwischen Rollen- und Flaschenzügen besteht eigentlich kein Unterschied. Doch versteht man im engeren Sinne unter Rollenzügen solche Rollenverbindungen, bei welchen die Rollen einzeln neben- oder untereinander angebracht sind, und unter Flaschenzügen solche, bei welchen die Rollen in zwei Gehäusen, den sogenannten **Flaschen**, untergebracht werden.

a) Der Potenzrollenzug.

Derselbe besteht aus einer Anzahl von Rollen, um welche je ein an einem Ende festgemachtes und mit dem andern an die nächste Rolle gehängtes Seil geschlungen ist. Das oberste Seil geht um eine feste Rolle. Fig. 125.

Ist die Zugkraft an der obersten Rolle K, so ist der Widerstand in der anderen Seilseite $\frac{K}{\mu}$. — Die Last an dieser Rolle ist daher

$$K_1 = K + \frac{K}{\mu} = K\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)$$

Ebenso ergibt sich die Last an der nächsten losen Rolle mit

$$K_2 = K\left(1 + \frac{1}{\mu}\right) + \frac{K\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)}{\mu} = K\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^2$$

An der untersten, etwa der $n$ten losen Rolle greift daher an

$$K_n = K\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^n = Q, \text{ woraus}$$

$$K = \frac{Q}{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^n} \qquad \text{(115)}$$

sich ergibt. Wären keinerlei Reibungswiderstände vorhanden, also die Widerstandsziffer $\mu = 1$, dann folgt

$$K = \frac{Q}{2^n} \qquad \text{(115a)}$$

d. h. „Die Kraft ist gleich der Last Q, dividiert durch die sovielte Potenz von 2 als die Zahl der losen Rollen im Potenzflaschenzuge beträgt."

Zur Hebung der Last Q ist am freien über die obere feste Rolle gehenden Seilende die Kraft

$$P = \mu K = \frac{\mu Q}{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^n} = \frac{Q}{\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^n} \qquad \text{(115b)}$$

nötig. — Um die Geschwindigkeit der Last zu finden, braucht nur die Arbeitsgleichung aufgestellt zu werden (nämlich Arbeit der Kraft gleich Arbeit der Last). — Nach den Bezeichnungen in Fig. 125 wird

$$P \cdot v = Q \cdot c$$

$$c = \frac{P \cdot v}{Q} = \frac{Q \cdot v}{\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^n \cdot Q}$$

$$\left.\begin{aligned} c &= \frac{v}{\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^n} \\ \text{für } \mu = 1 \qquad c &= \frac{v}{2^n} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(115c)}$$

„Der Wirkungsgrad des Potenzrollenzuges ist das Verhältnis aus ideeller Zugkraft und effektiver."

$$\eta = \frac{\frac{Q}{2^n}}{\frac{Q}{\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^n}} = \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^n}} \text{ oder}$$

$$\eta = \frac{\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^n}{2^n} \qquad \text{(116)}$$

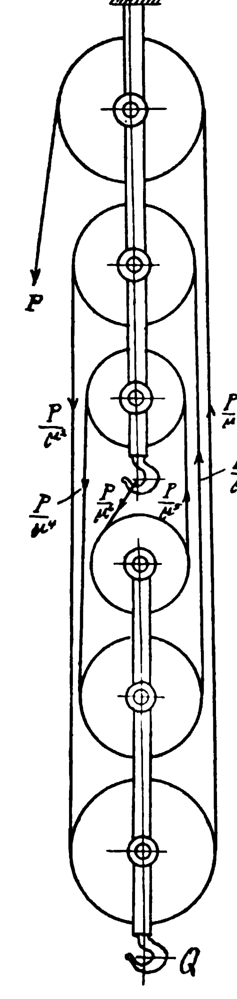


Fig. 126.

b) Der gewöhnliche Flaschenzug.

Bei diesem ist die Hälfte der Rollen in einer festen Flasche, die andere Hälfte in einer losen Flasche untergebracht. Die Seilführung ist aus der Fig. 126 ersichtlich. Laut Bezeichnungen der letzteren gilt

$$Q = \frac{P}{\mu} + \frac{P}{\mu^2} + \frac{P}{\mu^3} + \frac{P}{\mu^4} + \frac{P}{\mu^5} + \frac{P}{\mu^6}$$

$$Q = \frac{P}{\mu^6}(1 + \mu + \mu^2 + \mu^3 + \mu^4 + \mu^5)$$

$$Q = \frac{P}{\mu^6} \cdot \frac{\mu^6 - 1}{\mu - 1}.$$

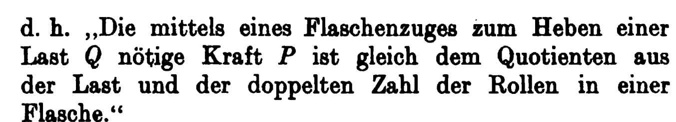
Allgemein

$$Q = \frac{P}{\mu^{2n}} \cdot \frac{\mu^{2n} - 1}{\mu - 1} \quad \ldots\ldots \quad (117)$$

Wird die Reibung überall vernachlässigt, dann wird $\mu = 1$ und

$$Q = \frac{P}{1^{2n}} \cdot (\mu^{2n-1} + \mu^{2n-2} + \mu^{2n-3} + \ldots + 1) = P \cdot 2n$$

$$P = \frac{Q}{2n} \quad \ldots\ldots \quad (117a)$$


d. h. „Die mittels eines Flaschenzuges zum Heben einer Last Q nötige Kraft P ist gleich dem Quotienten aus der Last und der doppelten Zahl der Rollen in einer Flasche.“

Der gewöhnliche Flaschenzug wird oft auch **Faktorenflaschenzug** genannt.

Der Wirkungsgrad desselben ist

$$\eta = \frac{\frac{Q}{2n}}{\frac{Q \cdot \mu^{2n}(\mu - 1)}{\mu^{2n} - 1}} = \frac{\frac{1}{2n}}{\frac{\mu^{2n}(\mu - 1)}{\mu^{2n} - 1}} \quad \text{oder}$$

$$\eta = \frac{\mu^{2n} - 1}{2n \cdot \mu^{2n}(\mu - 1)} \quad \ldots\ldots \quad (118)$$


c) Der Differenzialflaschenzug.

Zur Hebung schwerer Lasten von Menschenhand eignet sich bestens der Differenzialflaschenzug, da in diesem Falle ein Faktorenflaschenzug wegen zu großer Zahl von Rollen einen zu geringen Wirkungsgrad ergeben würde.

Derselbe besteht der Hauptsache nach aus zwei auf derselben Achse sitzenden Rollen (meist aus einem Stück gegossen), deren Durchmesser indes nicht sehr verschieden sind, und einer Rolle, deren Durchmesser gleich ist dem Mittel aus den Durchmessern der ersteren Rollen. Um alle Rollen ist ein endloses Seil (endlose Kette) geschlungen, wie Fig. 127 anzeigt.

Entsteht im linken Seilteil an der unteren Rolle die Zugkraft P, so muß die im rechten Seilteil $P\mu$ sein. Demnach ergibt sich

$$Q = P + P\cdot\mu = P\cdot(\mu + 1)$$

$$P = \frac{Q}{1+\mu}$$

Die Summe der Momente der Kräfte K und P in bezug auf den Drehpunkt der oberen Rollen muß nun μ mal so groß sein, wie das Moment der Kraft $P\cdot\mu$ in bezug auf denselben, also wird

$$K\cdot R + P\cdot r = \mu\,(P\cdot\mu\cdot R)$$

$$K\cdot R = P\,(\mu^2 R - r)$$

$$K = Q\,\frac{\mu^2 - \frac{r}{R}}{1+\mu} \quad \ldots \text{(119)}$$

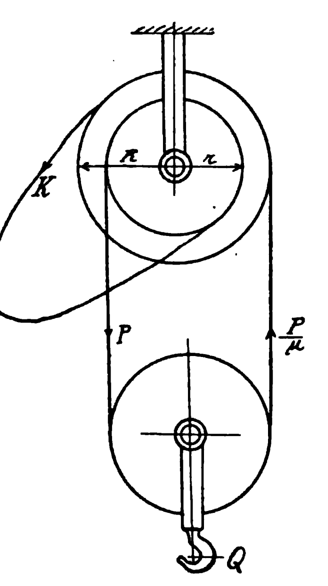


Fig. 127.

Bei Vernachlässigung aller Widerstände würde sich wegen $\mu = 1$ ergeben

$$K = \frac{Q}{2}\left(1 - \frac{r}{R}\right) \quad \ldots \text{(119a)}$$

Der Wirkungsgrad des Differenzialflaschenzuges ist

$$\eta = \frac{\frac{Q}{2}\left(1 - \frac{r}{R}\right)}{Q\,\frac{\mu^2 - \frac{r}{R}}{1+\mu}} \quad \text{oder}$$

$$\eta = \frac{(1+\mu)\left(1 - \frac{r}{R}\right)}{2\left(\mu^2 - \frac{r}{R}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(120)}$$

d) Lastrollenzüge mit gemeinsamer Hubbahn der losen Rollen.

Beispiel.

Lasttrum (Lastende) fest aufgehängt.

Die Spannungen in den parallelen Seilstücken seien der Reihe nach S_1, S_2, S_3 .... S_n, Fig. 128. Dann wird

$$S_2 = S_1\cdot\mu$$

$$S_3 = S_2\cdot\mu = S_1\cdot\mu^2$$

$$S_4 = S_3\cdot\mu = S_1\cdot\mu^3$$

$$\vdots$$

$$S_n = S_1\cdot\mu^{n-1}.$$

Nun ist $Q = S_1 + S_1 \cdot \mu + S_1 \cdot \mu^2 + \ldots\ldots S_1 \cdot \mu^{n-1}$

$$Q = S_1 (1 + \mu + \mu^2 + \ldots\ldots + \mu^{n-1})$$

$$Q = S_1 \frac{\mu^n - 1}{\mu - 1}.$$

Da $P = S_n \cdot \mu = S_1 \cdot \mu^{n-1} \cdot \mu = S_1 \cdot \mu^n$ ist, folgt

$$S_1 = \frac{P}{\mu^n} \text{ und}$$

$$Q = \frac{P}{\mu^n} \cdot \frac{\mu^n - 1}{\mu - 1},$$

so daß endlich wird

$$P = Q \cdot \frac{\mu^n \cdot (\mu - 1)}{\mu^n - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (121)$$

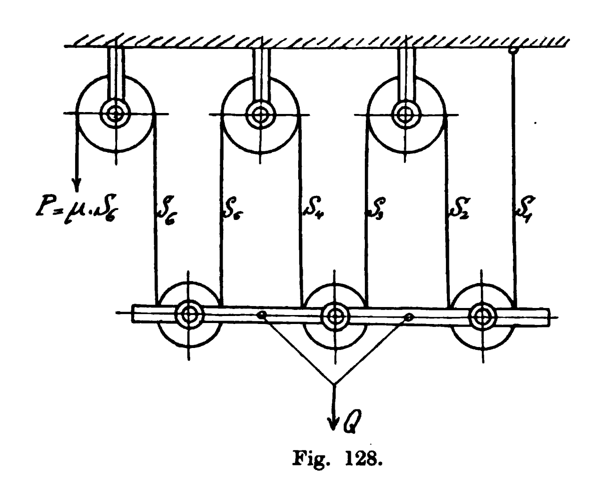


Fig. 128.

Die theoretische Hubkraft ergibt sich aus

$$P = Q \frac{\mu^n}{\frac{\mu^n - 1}{\mu - 1}} = Q \frac{\mu^n}{\mu^{n-1} + \mu^{n-2} + \ldots + 1}$$

wenn man in dieser Beziehung $\mu = 1$ setzt, mit

$$P = \frac{Q}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (121\text{a})$$

Daher wird der Wirkungsgrad dieses Rollenzuges

$$\eta = \frac{\frac{Q}{n} \cdot (\mu^n - 1)}{Q \cdot \mu^n \cdot (\mu - 1)} \text{ oder}$$

$$\eta = \frac{\mu^n - 1}{n \cdot \mu^n (\mu - 1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (122)$$

Beispiele.

145. Wie groß ist die zum Heben einer Last Q mittels eines $n$rolligen Potenzrollenzuges nötige Kraft P, wenn das Gewicht der Rollen à G kg berücksichtigt, von den Reibungswiderständen aber abgesehen wird?

Auflösung: An der untersten Rolle greift die Kraft $Q+G$ an. An der Schere der zweiten Rolle ist die Größe der angreifenden Kraft

$$\frac{Q+G}{2}+G=\frac{Q+3G}{2}=\frac{Q+(2^2-1)G}{2^{2-1}}$$

Für die Last an der dritten Rolle ergibt sich

$$\frac{Q+3G}{4}+G=\frac{G+7G}{4}=\frac{Q+(2^3-1)G}{2^{3-1}}$$

Allgemein an der $n$ten Rolle

$$\frac{Q+(2^n-1)G}{2^{n-1}}$$

Demnach ist zum Heben die Kraft

$$P=\frac{1}{2}\cdot\frac{Q+(2^n-1)G}{2^{n-1}} \text{ nötig oder}$$

$$\boldsymbol{P=\frac{Q+(2^n-1)G}{2^n}} \qquad \textbf{(115 d)}$$

146. Wie verändert sich das Resultat der letzten Aufgabe, wenn außerdem noch die Reibungswiderstände berücksichtigt werden?

Auflösung: Laut Definition des Wirkungsgrades ergibt sich unter Benützung der Formeln (116 und 115d)

$$\frac{\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^n}{2^n}=\frac{\frac{Q+(2^n-1)G}{2^n}}{P}$$

$$\boldsymbol{P=\frac{Q+(2^n-1)G}{\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^n}} \qquad \textbf{(115 e)}$$

147. Es sollen 400 kg mit einem 4rolligen Potenzrollenzuge gehoben werden. Wie groß ist die hierzu erforderliche Kraft, wenn das Gewicht jeder Rolle 6 kg ist und $\mu=1,1$ (für Seile) angenommen werden kann?

Auflösung:
$$P=\frac{400+(2^4-1)\cdot 6}{\frac{1}{1,1}\left(1+\frac{1}{1,1}\right)^4}$$

$$P=\frac{400+90}{0,91\cdot 1,91^4}=\frac{490}{0,91\cdot 13,3}$$

$$\boldsymbol{P\sim 38\ \text{kg}}$$

148. Wie groß ist der Wirkungsgrad eines 4rolligen Potenzseilrollenzuges?

Auflösung:
$$\eta = \frac{1}{1,1} \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{1,1}\right)^4}{2^4}$$
$$\eta \sim 0,76$$

d. h. 76%, natürlich unter Annahme, daß vier lose und eine feste Rolle vorhanden sind.

149. Welche Last kann mittels eines gewöhnlichen Flaschenzuges mit vier Rollen in jeder Flasche gehoben werden, wenn am freien Seilende mit 15 kg gezogen wird? Wie groß ist ferner der Wirkungsgrad dieses Flaschenzuges?

Auflösung:
$$Q = \frac{P}{1,1^8} \cdot \frac{1,1^8 - 1}{1,1 - 1}$$
$$Q = \frac{15}{2,1} \cdot \frac{1,1}{0,1}$$
$$Q \sim 78,5 \text{ kg}$$
$$\eta = \frac{1,1^8 - 1}{8 \cdot 1,1^8 \cdot 0,1} = \frac{1,1}{0,8 \cdot 2,1} = \frac{1,1}{1,68}$$
$$\eta = 0,65$$

Ohne Rücksicht auf die Reibungswiderstände würde sich ergeben
$$Q = P \cdot 2n$$
$$Q = 15 \cdot 8 = 120$$

Wirklich ist $Q = 120 \cdot 0,65 \sim 78,5$ kg

150. Welche Last kann mit einem Differenzialflaschenzug gehoben werden, wenn das Verhältnis der Halbmesser der oberen Rollen $\frac{r}{R} = \frac{11}{12}$ und die aufgewandte Kraft $K = 40$ kg ist? Wie groß ist ferner der Wirkungsgrad? $\mu = 1,1$.

$$K = Q \frac{\mu^2 - \frac{r}{R}}{1 + \mu}$$
$$Q = \frac{K(1+\mu)}{\mu^2 - \frac{r}{R}}$$
$$Q = \frac{40 \cdot 2,1}{1,1^2 - \frac{11}{12}} = \frac{84}{1,21 - 0,917} = \frac{84}{0,293}$$
$$Q \sim 287 \text{ kg}$$
$$\eta = \frac{(1+\mu) \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right)}{2\left(\mu^2 - \frac{r}{R}\right)} = \frac{2,1 \cdot \frac{1}{12}}{2 \cdot \left(1,1^2 - \frac{11}{12}\right)}$$
$$\eta = \frac{2,1}{24 \cdot 0,293}$$
$$\eta \sim 0,3$$

151. Unter welcher Bedingung ist ein Differenzialflaschenzug **selbsthemmend,** d. h. wann sinkt die untere Rolle trotz der Belastung nicht mehr hinunter?

Auflösung: In der Formel (119) ist statt μ nur $\frac{1}{\mu}$ zu setzen, damit die Größe der Kraft, welche das Herabsinken der Last verhindert, erhalten werde.

$$K = Q \frac{\frac{1}{\mu^2} - \frac{r}{R}}{1 + \frac{1}{\mu}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(119b)}$$

Der Differenzialflaschenzug wird nun selbsthemmend, wenn $K = 0$ ist. Das trifft zu für

$$\frac{1}{\mu^2} = \frac{r}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(119c)}$$

152. Wie groß ist der Wirkungsgrad eines selbsthemmenden Differenzialflaschenzuges?

Auflösung:
$$\eta = \frac{\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)\left(1 - \frac{r}{R}\right)}{2\left(\mu^2 - \frac{r}{R}\right)} = \frac{\left(1 + \sqrt{\frac{r}{R}}\right)\frac{R - r}{R}}{2\left(\frac{R}{r} - \frac{r}{R}\right)}$$

$$\eta = \frac{\left(1 + \sqrt{\frac{r}{R}}\right)\frac{R - r}{R}}{2\frac{R^2 - r^2}{Rr}}$$

$$\eta = \frac{1 + \sqrt{\frac{r}{R}}}{2\left(1 + \frac{R}{r}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(119d)}$$

Für $\frac{r}{R} = \frac{11}{12}$ wird $\eta = \frac{1 + \sqrt{\frac{11}{12}}}{2\left(1 + \frac{12}{11}\right)} = \frac{1 + 0,955}{2 \cdot (1 + 1,09)} \sim \frac{1,955}{4,18}$

$$\eta \sim 0,47$$

§ 39. Das Rad auf der Welle und seine Anwendungen.

Will man eine ununterbrochen fortdauernde Hebelwirkung erzielen, so bedient man sich des Rades auf der Welle, Fig. 129. — Die Last hängt an

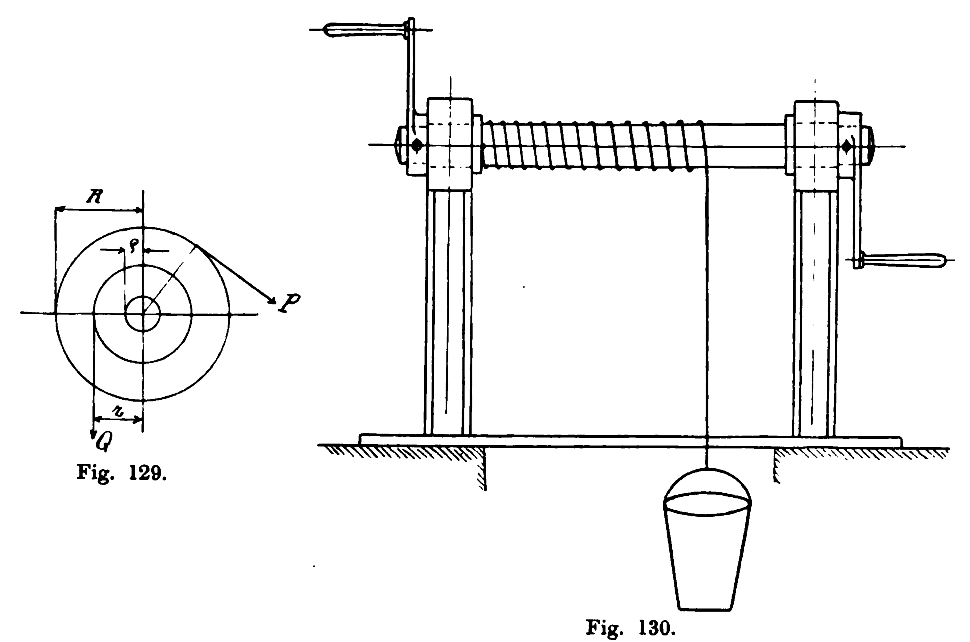


Fig. 129.

Fig. 130.

Seilen oder Ketten, welche um die Welle geschlungen sind. Durch Drehen eines auf der letzteren befestigten Rades kann sie gehoben werden.

Auf dem Prinzipe des Rades auf der Welle beruhen die **Haspeln**, Fig. 130, die **Göpel**, Fig. 131, und das **Seilrad**, Fig. 132.

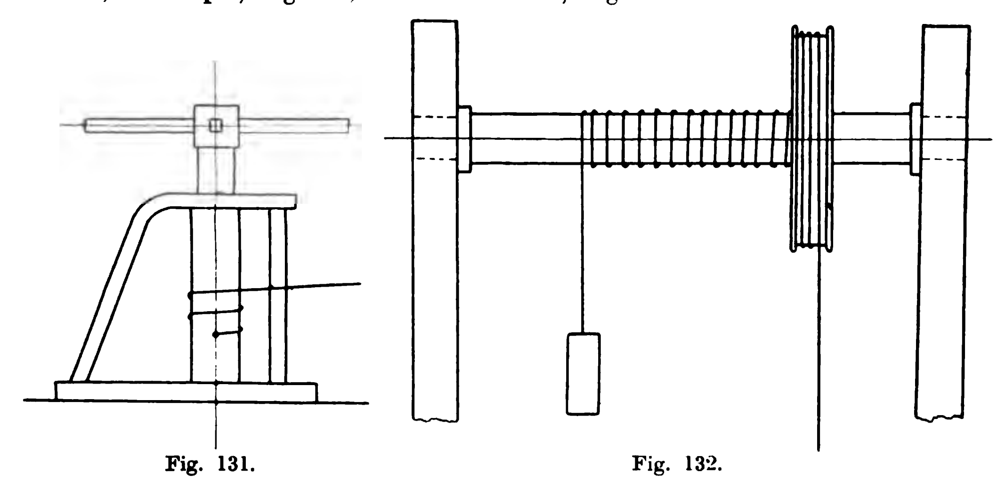


Fig. 131.

Fig. 132.

Bedeutet in Fig. 129 . . . . Q die Last, P die Kraft am Rade, r den Radius der Welle, R denjenigen des Rades, G das Eigengewicht der Welle, ϱ den

Zapfenhalbmesser und δ die Seildicke, so ist Gleichgewicht vorhanden, wenn, falls $P \parallel Q$ liegt, für Heben der Last die Beziehung besteht

$$P \cdot R = Q \cdot r + (P + Q + G)\,\varphi \cdot \varrho + \frac{1}{2} \cdot \frac{13\,\delta^2}{r} \cdot Q\,r \text{ oder}$$

$$\boldsymbol{P \cdot R = Q\,r + (P + Q + G) \cdot \varphi \cdot \varrho + \frac{1}{2} \cdot 13\,\delta^2 \cdot Q} \quad . \quad \mathbf{(123)}$$

Es kommt nur die Hälfte des Seilwiderstandes in Betracht, da ein Seilende fest ist.

Beim Herunterlassen der Last wirken Zapfen- und Seilreibung entgegengesetzt. Daher wird

$$\boldsymbol{P \cdot R = Q\,r - (P + Q + G)\,\varphi \cdot \varrho - \frac{1}{2} \cdot 13\,\delta^2 \cdot Q} \quad . \; . \; . \; . \quad \mathbf{(123a)}$$

---

§ 40. Räderwerke.

Um mit geringer Kraft und in bequemer Richtung mit derselben schwere Lasten heben zu können, benützt man **Räderwerke.**

„Das einfachste Räderwerk besteht aus zwei Zahnrädern, von denen das größere auf der Lastwelle, das kleinere auf der Kraftwelle aufgekeilt ist."

„Ein zusammenarbeitendes Räderpaar heißt ein **Vorgelege.**"

„Die Wirkung eines aus einem größeren und einem kleineren Zahnrade bestehenden Vorgeleges besteht in der Verlangsamung der Bewegung der Last; da die Kraft also einen größeren Weg beschreibt, kann sie entsprechend mal kleiner als die Last sein."

Bei Bestimmung der effektiven Kraft P an der Kurbel des in Fig. 133 gezeichneten Räderwerkes mit doppeltem Vorgelege werden gleich alle Reibungswiderstände berücksichtigt.

Ohne Rücksicht auf die Widerstände würde die am Umfang des Zahnrades B nötige Kraft gleich sein

$$Z_1 = \frac{P \cdot l}{r_1}$$

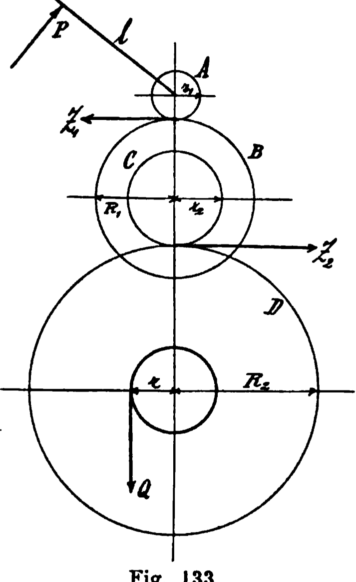


Fig. 133.

Mit Rücksicht auf Zapfen- und Zahnreibung aber ergibt sich der Druck

$$Z_1 = \eta_1 \cdot \frac{P \cdot l}{r_1}$$

wenn η_1 der Wirkungsgrad des Vorgeleges ist.

Ist ebenso η_2 derjenige des zweiten, so wird die effektive Umfangskraft am Rade C oder, was dasselbe ist, am Rade D

$$Z_2 = \eta_2 \cdot \frac{Z_1 R_1}{r_2} = \eta_1\,\eta_2 \cdot \frac{P\,l\,R_1}{r_1\,r_2}$$

Bezeichnet endlich η_3 den Wirkungsgrad der Lasttrommel, so wird

$$Q = \eta_3 \frac{Z_2 R_2}{r} = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \frac{P \cdot l \cdot R_1 R_2}{r \cdot r_1 r_2}$$

und daraus $P = \frac{1}{\eta_1 \eta_2 \eta_3} \cdot \frac{Qr}{l} \cdot \frac{r_1 r_2}{R_1 R_2}$

Die theoretisch nötige Kraft an der Kurbel ist

$$P = \frac{Qr}{l} \cdot \frac{r_1 r_2}{R_1 R_2}.$$

Demnach beträgt der **Gesamtwirkungsgrad des Räderwerkes**

$$\eta = \frac{\frac{Qr}{l} \cdot \frac{r_1 r_2}{R_1 R_2}}{\frac{1}{\eta_1 \eta_2 \eta_3} \cdot \frac{Qr}{l} \cdot \frac{r_1 r_2}{R_1 R_2}} \text{ oder}$$

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (124)$$

Die Kraft an der Kurbel ergibt sich dann mit $P = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{Qr}{l} \cdot \frac{r_1 r_2}{R_1 R_2}$ (125)

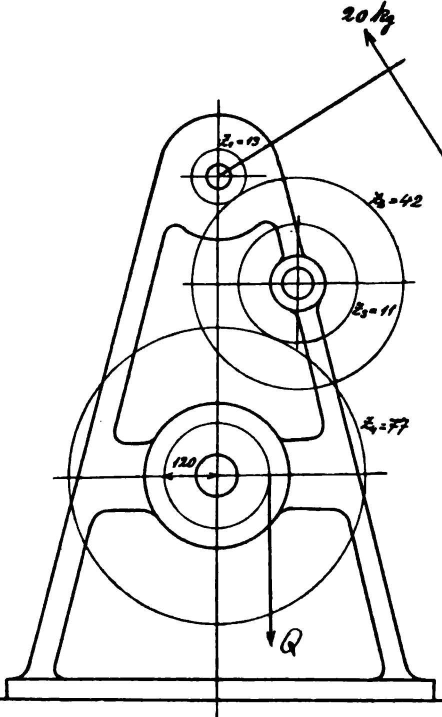


Fig. 134.

„Das Verhältnis aus dem Produkte der Radien (Zähnezahlen) der treibenden Räder und dem Produkte der Radien (Zähnezahlen) der getriebenen Räder heißt **Übersetzung** y"

$$y = \frac{r_1 r_2}{R_1 R_2} \quad . \quad (126)$$

Es läßt sich daher für P auch schreiben $P = \frac{1}{\eta} \cdot y \cdot \frac{Qr}{l}$ (127)

und für das Kraftmoment

$$P \cdot l = \frac{1}{\eta} y Q r \quad (128)$$

d. h. „das Kraftmoment ist gleich dem Produkte aus dem reziproken Werte des Wirkungsgrades, Übersetzung und Lastmoment."

Für den Wirkungsgrad eines Zahnradvorgeleges kann 0,9 angenommen werden. Er wird um so günstiger, je größer die Zähnezahlen der treibenden Räder sind.

Bei zwei Vorgelegen soll im folgenden $\eta = 0{,}8$ gesetzt werden.

Beispiele.

153. Wie groß kann die mittels der in Fig. 134 skizzierten Bauwinde zu hebende Last sein, wenn die Kraft an der Kurbel $P = 20$ kg, der Hebelarm der Kraft $l = 0{,}3$ m, der Radius der Lasttrommel $r = 0{,}12$ m und die Zähnezahlen der Räder $z_1 = 13$, $z_2 = 42$, $z_3 = 11$ und $z_4 = 77$ sind?

Auflösung:

$$y = \frac{13 \cdot 11}{42 \cdot 77} = \frac{1}{\frac{42 \cdot 77}{13 \cdot 11}} = \frac{1}{22,5}$$

$$y = 0,8$$

$$20 \cdot 0,3 \cdot 0,8 = Q \cdot 0,12 \cdot \frac{1}{22,5}$$

$$Q = \frac{20 \cdot 0,3 \cdot 22,5 \cdot 0,8}{0,12}$$

$$\boldsymbol{Q \sim 900\ \mathrm{kg}}$$

154. Welche Kraft ist an der Kurbel der in Fig. 135 skizzierten Kranwinde nötig, damit die Last von 1500 kg gehoben werde?

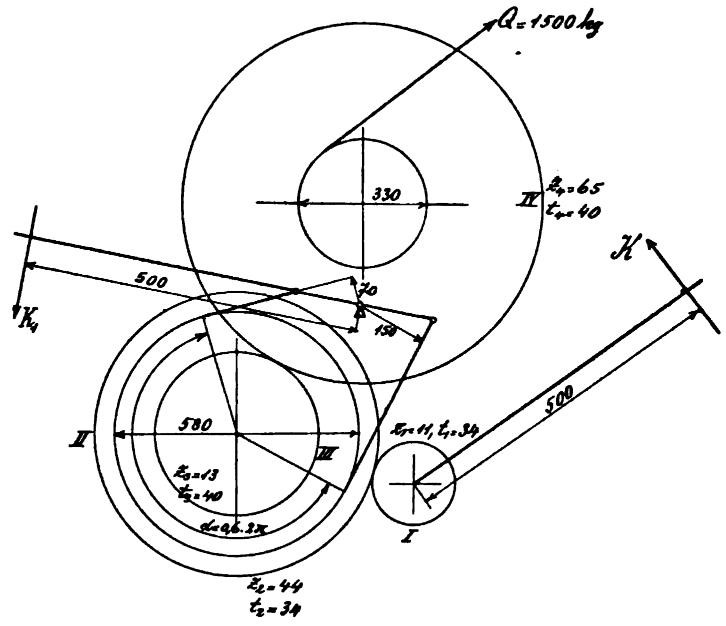


Fig. 135.

Auflösung:

$$K \cdot 0,5 \cdot 0,8 = 1500 \cdot 0,165 \, \frac{11 \cdot 13}{44 \cdot 65}$$

$$K = \frac{1500 \cdot 0,165 \cdot 11 \cdot 13}{0,5 \cdot 44 \cdot 65 \cdot 0,8}$$

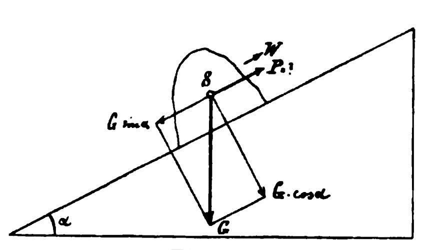
$$\boldsymbol{K \sim 31\ \mathrm{kg}}$$

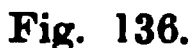
§ 41. Die schiefe Ebene.

In diesem Paragraphen können alle Gleichgewichtsprobleme als Beispiele behandelt werden.

Beispiele.

155. Wie groß muß die parallel zur schiefen Ebene wirkende Kraft P, Fig. 136, sein, damit der Körper a) nicht heruntergleite, b) von der Kraft gleichförmig hinaufgezogen werden könne? Reibungskoeffizient sei f.




Fig. 136.

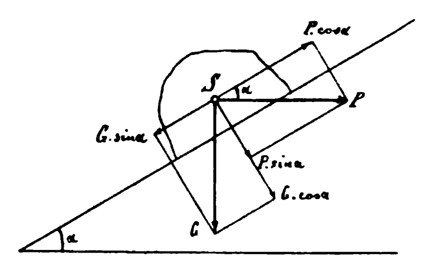


Fig. 137.

Auflösung: Die Kraft G zerlegt man in $G \sin \alpha$ und $G \cos \alpha$.

ad a) Soll der Körper nicht heruntergleiten, dann muß $G \sin \alpha$ gleich sein P plus der Reibung. Somit ergibt sich

$$G \sin \alpha = P + f \cdot G \cdot \cos \alpha$$

$$P = G \cdot (\sin \alpha - f \cos \alpha)$$

Nun ist $f = \operatorname{tg} \varphi$ (83), so daß folgt

$$P = G (\sin \alpha - \operatorname{tg} \varphi \cos \alpha) = G \left(\sin \alpha - \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cos \alpha\right)$$

$$P = G \frac{\sin \alpha \cos \varphi - \sin \varphi \cos \alpha}{\cos \varphi}$$

$$\mathbf{P = G \frac{\sin (\alpha - \varphi)}{\cos \varphi}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(129a)}$$

ad b) Soll die Kraft P den Körper gleichförmig nach aufwärts bewegen, so wird die Reibung entgegengesetzte Richtung haben, also negativ zu setzen sein. Demnach ist

$$\mathbf{P = G \frac{\sin (\alpha + \varphi)}{\cos \varphi}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(129b)}$$

Wird die Reibung des Körpers auf der schiefen Ebene vernachlässigt, dann ist in beiden Fällen

$$P = G \sin \alpha,$$

d. h. gleich der den Körper hinunterziehenden Kraft.

156. Wie groß muß in den Fällen a) und b) die zur Basis der schiefen Ebene parallel wirkende Kraft P sein? Fig. 137.

Auflösung: ad a) Die Reibung wirkt hier im Sinne der Komponente $P \cdot \cos \alpha$. Gleichgewicht ist also vorhanden, wenn gilt

$$G \sin \alpha = P \cos \alpha + f\,(G \cos \alpha + P \sin \alpha)$$

$$G\,(\sin \alpha - f \cos \alpha) = P\,(\cos \alpha + f \sin \alpha)$$

$$G \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} = P \frac{\cos \alpha \cos \varphi + \sin \alpha \sin \varphi}{\cos \varphi}$$

$$G \sin(\alpha - \varphi) = P \cdot \cos(\alpha - \varphi)$$

$$P = G \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\alpha - \varphi)}$$

$$\boldsymbol{P = G\,\mathrm{tg}\,(\alpha - \varphi)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(130a)}$$

ad b) Soll der Körper gleichförmig nach aufwärts gezogen werden, dann muß sein

$$\boldsymbol{P = G\,\mathrm{tg}\,(\alpha - \varphi)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(130b)}$$

Bei Vernachlässigung der Reibung wird $P = G\,\mathrm{tg}\,\alpha$ — Da $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{h}{b}$, wenn h die Höhe und b die Basis der schiefen Ebene bedeuten, ist, folgt $P : G = h : b$, d. h. die Kraft verhält sich zur Last wie die Höhe zur Basis der schiefen Ebene.

157. Wie groß muß in den Fällen a) und b) die mit der schiefen Ebene den Winkel β einschließende Kraft P sein? Fig. 138.

Auflösung: ad a) Die Reibung wirkt mit der Komponente $P \cos \beta$; der Normaldruck ist

$$G \cos \alpha - P \sin \beta$$

Fig. 138.

Daher muß sein

$$G \sin \alpha = P \cos \beta + f\,(G \cos \alpha - P \sin \beta)$$

$$G\,(\sin \alpha - f \cos \alpha) = P\,(\cos \beta - f \sin \beta)$$

$$G \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} = P \frac{\cos \beta \cos \varphi - \sin \beta \sin \varphi}{\cos \varphi}$$

$$G \sin(\alpha - \varphi) = P \cos(\beta + \varphi)$$

$$\boldsymbol{P = G \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\beta + \varphi)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(131a)}$$

ad b) wird

$$\boldsymbol{P = G \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos(\beta - \varphi)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(131b)}$$

In diesem Falle sind die früheren als spezielle enthalten.

α) Wird $\beta = 0$, dann kommt man auf Aufgabe 155 zurück; es wird

$$P = G \frac{\sin(\alpha \mp \varphi)}{\cos \varphi}$$

β) Wird $\beta = -\alpha$, dann folgt der in Aufgabe 156 behandelte Fall und ergibt sich

$$P = G\,\mathrm{tg}\,(\alpha \mp \varphi)$$

158. Unter welchem Winkel muß eine schiefe Ebene gegen den Horizont geneigt sein, damit ein Körper mit dem Gewichte G kg auf ihr durch eine Kraft $P = G$ kg, welche mit der schiefen Ebene den Winkel $\beta = 46^0$ bildet, vor Hinuntergleiten bewahrt werde? $f = 0{,}25$.

Auflösung: Der Ansatz ist derselbe wie in der vorigen Aufgabe, nur ist statt $P \ldots G$ zu setzen.

$$G \sin\alpha = G \cos\beta + f(G\cos\alpha - G\sin\beta)$$
$$\sin\alpha = \cos\beta + f\cos\alpha - f\sin\beta$$
$$\sin\alpha - f\cos\alpha = \cos\beta - f\sin\beta$$
$$\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos\varphi} = \frac{\cos(\beta + \varphi)}{\cos\varphi}$$
$$\sin(\alpha - \varphi) = \cos(\beta + \varphi)$$
$$f = 0{,}25 = \operatorname{tg}\varphi$$
$$\varphi = 14^0$$
$$\cos(\beta + \varphi) = \cos(46^0 + 14^0) = \cos 60^0$$
$$\cos 60^0 = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2} = \sin(\alpha - \varphi)$$
$$\alpha - \varphi = 30^0$$
$$\alpha \sim 44^0$$

159. Zwei Körper liegen auf zwei schiefen Ebenen, deren Neigungswinkel gegen den Horizont $\alpha = 36^0$ und $\beta = 54^0 30'$ betragen. Wie groß ist das

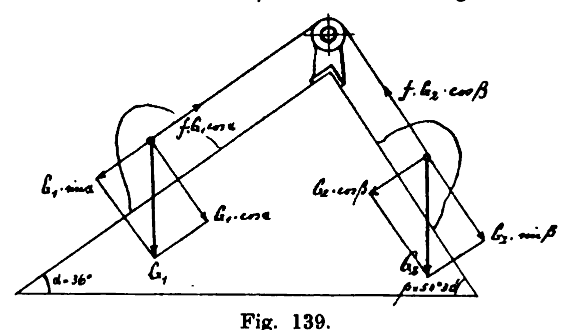


Fig. 139.

Verhältnis der Gewichte der Körper, wenn sie sich im Gleichgewichte befinden und $f = 0{,}105$ ist?

Auflösung: $G_1 \sin\alpha - f G_1 \cos\alpha = G_2 \sin\beta - f G_2 \cos\beta$

$$G_1 \cdot \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos\varphi} = G_2 \frac{\sin(\beta - \varphi)}{\cos\varphi}$$
$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{\sin(\beta - \varphi)}{\sin(\alpha - \varphi)} = \frac{\sin(54^0 30' - 6^0)}{\sin(36^0 - 6^0)}$$
$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{0{,}75}{0{,}5}$$
$$\frac{G_1}{G_2} = 1{,}5$$

160. Ein Wagen mit dem Gewichte Q kg soll eine Ebene von $s\,^0/_0$ Steigung hinaufgezogen werden. Wie groß ist die nötige Zugkraft, wenn der Koeffizient der Gesamtreibung k ist?

Auflösung: Die Zugkraft muß gleich sein der die Straße hinunterwirkenden Komponente $Q \sin\alpha$ plus dem Widerstande $kQ\cos\alpha$.

$$P = Q \cdot \sin\alpha + kQ\cos\alpha$$
$$P = Q\,(\sin\alpha + k\cos\alpha)$$

Die Straße hat $s\,^0/_0$ Steigung, d. h. auf s Meter Höhenzuwachs kommen 100 Meter Straßenlänge. Die Tangente von α ist daher $\frac{s}{100}$, somit

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \text{ und } \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

$$P = Q\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} + k\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}\right) \text{ oder}$$

$$P = \frac{Q}{\sqrt{1+\left(\frac{s}{100}\right)^2}} \cdot \left(\frac{s}{100} + k\right)$$

---

§ 42. Der Keil.

a) Der doppelte Keil.

Der in Fig. 140 skizzierte doppelte Keil ACB soll durch eine Kraft P zum Eindringen gebracht werden.

Die Fläche, in der die Kraft angreift, heißt **Rücken des Keiles**, die sich in der Kante A schneidenden Flächen werden als **Seiten des Keiles** bezeichnet.

Dem Eindringen des Keiles wirken entgegen α) die Widerstände Q, β) die Reibungswiderstände fQ. Erstere ergeben die Resultierende R_1, letztere R_2. Sind R_1 und R_2 zusammen gleich P, dann ist Gleichgewicht vorhanden und wird

$$P = R_1 + R_2 = 2Q\sin\alpha + 2fQ\cos\alpha$$
$$P = 2Q\,(\sin\alpha + f\cos\alpha)$$
$$P = 2Q\left(\sin\alpha + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos\alpha\right)$$
$$\mathbf{P = 2Q\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos\varphi}} \quad \textbf{(132)}$$

Das Zurückgehen des Keiles wird verhindert durch eine Kraft

$$\mathbf{P_1 = 2Q\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi}} \quad \textbf{(132a)}$$

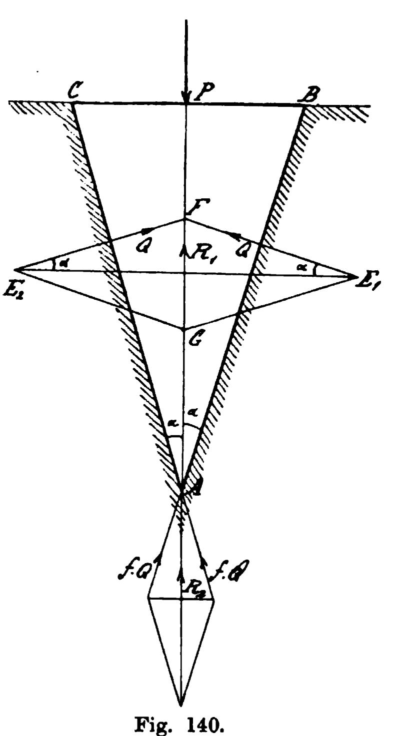


Fig. 140.

Die Reibung wirkt nämlich in diesem Falle entgegengesetzt wie früher, so daß f negativ zu setzen ist.

Wird $(\alpha - \varphi) > 0$, was für $\alpha > \varphi$ zutrifft, dann ist $P_1 > 0$, d. h. es muß zum Eintreiben des Keiles eine Kraft vorhanden sein.

Wenn $\alpha - \varphi = 0$ sich ergibt, was der Fall für $\varphi = \alpha$ ist, folgt $P_1 = 0$. d. h. der Keil geht nicht zurück; er wird vor Zurückgehen durch Reibung bewahrt.

Die Kraft P_1 ist kleiner als Null (negativ), wenn $\varphi > \alpha$ ist, d. h. es gehört noch eine Kraft dazu, den Keil aus dem Materiale, in welches er eingedrungen ist, herauszuziehen. Keile mit $\alpha < \varphi$ nennt man **Befestigungskeile.**

„Unter **Wirkungsgrad eines Keiles** versteht man das Verhältnis aus der zum Eintreiben desselben theoretisch nötiger und der praktisch nötigen (wirklichen) Kraft.“

Daher wird $\eta = \dfrac{2Q \sin \alpha}{2Q \dfrac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi}} = \dfrac{\sin \alpha \cos \varphi}{\sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi}$

$$\eta = \frac{1}{1 + f \cot \alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (133)$$

b) Der einfache Keil.

Zunächst werde die Kraft abgeleitet, um ein Herausspringen des Keiles zu verhindern. Hierzu Fig. 141.

Der Druck senkrecht zur Fläche BD werde mit Q, der senkrecht zur

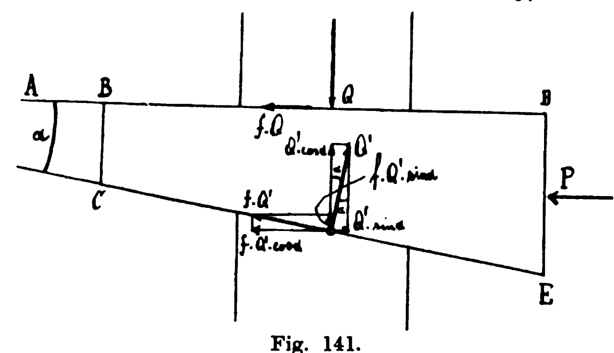


Fig. 141.

Fläche CE mit Q' bezeichnet. Gleichgewicht ist nun vorhanden, wenn die $\Sigma(H) = 0$ und die $\Sigma(V) = 0$ ist. Sonach folgen die Gleichungen

$$P + fQ + fQ' \cos \alpha - Q' \sin \alpha = 0$$

$$Q - Q' \cos \alpha - fQ' \sin \alpha = 0$$

$$Q' = \frac{Q}{\cos \alpha + f \sin \alpha}$$

$$P = Q' \sin \alpha - fQ - fQ' \cos \alpha$$

$$P = \frac{Q}{\cos \alpha + f \sin \alpha} \cdot (\sin \alpha - f \cos \alpha) - fQ$$

$$P = Q\left(\frac{\sin \alpha - f \cos \alpha}{\cos \alpha + f \sin \alpha} - f\right), \text{ somit}$$

$$\boldsymbol{P = Q \cdot [\mathrm{tg}(\alpha - \varphi) - \mathrm{tg}\,\varphi]} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (134)$$

Die Kraft, um das Eindringen einzuleiten, ist

$$P = Q \cdot [\mathrm{tg}\,(\alpha + \varphi) + \mathrm{tg}\,\varphi] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (134a)$$

Der Wirkungsgrad des einfachen Keiles wird

$$\eta = \frac{Q\,\mathrm{tg}\,\alpha}{Q\,[\mathrm{tg}\,(\alpha + \varphi) + \mathrm{tg}\,\varphi]}$$

$$\eta = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,(\alpha + \varphi) + \mathrm{tg}\,\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (135)$$

Beispiele.

161. Wann ist ein einfacher Keil selbsthemmend?

Auflösung: Zum Herausziehen des Keiles ist eine Kraft

$$P = Q\,[\mathrm{tg}\,(\alpha - \varphi) - \mathrm{tg}\,\varphi]$$

nötig. **Selbsthemmend** heißt der Keil, wenn $P = 0$ wird. Die Bedingung für Selbsthemmung lautet daher

$$\alpha - \varphi \lesseqgtr \varphi \text{ oder}$$

$$\alpha \lesseqgtr 2\varphi$$

162. Welcher Druck ist nötig, um mit der nicht angezogenen Fläche eines einfachen Keiles, Fig. 142, einen Druck von 300 kg auszuüben? $f = 0{,}18$.

Auflösung:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{40}{400} = 0{,}1$$

$$\alpha = 5^0\,43'$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = 0{,}18$$

$$\varphi = 10^0\,12'$$

$$P = 300\,[\mathrm{tg}\,(5^0\,43' + 10^0\,12') + \mathrm{tg}\,10^0\,12']$$

$$P = 300 \cdot (\mathrm{tg}\,15^0\,55' + \mathrm{tg}\,10^0\,12')$$

$$P \sim 136\ \mathrm{kg}$$

Fig. 142.

163. Welchen Druck Q kann man mit P kg durch einen doppelten Keil erzeugen, wenn dessen Rücken b, dessen Seite s und der Reibungskoeffizient f ist?

Auflösung: $\quad P = 2Q\,(\sin\alpha + f\cos\alpha)$

$$Q = \frac{P}{2} \cdot \frac{1}{\frac{b}{2s} + f\sqrt{1 - \frac{b^2}{4s^2}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{\frac{1}{2s} \cdot [b + f\sqrt{4s^2 - b^2}]}$$

$$Q = \frac{P \cdot s}{b + f\sqrt{4s^2 - b^2}}$$

164. In welchem Verhältnisse müssen Rücken b und Seite s eines doppelten Keiles stehen, damit die zum Eintreiben desselben erforderliche Kraft gleich $^1/_2$ des auf seine Seite wirkenden Widerstandes werde und wie groß wird der Wirkungsgrad dieses Keiles? $f = 0{,}18$.

Auflösung:

$$P = \frac{Q}{2}$$

$$P = 2Q \cdot \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi}, \text{ d. h.}$$

$$\frac{1}{2} Q = 2Q \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi}$$

$$\frac{\cos \varphi}{4} = \sin(\alpha + \varphi)$$

$$f = 0{,}18$$

$$\varphi = 10^0\, 12'$$

$$\frac{\cos \varphi}{4} = \frac{0{,}985}{4} = 0{,}246$$

$$\sin(\alpha + \varphi) = 0{,}246$$

$$\alpha + \varphi = 14^0\, 15'$$

$$\alpha = 4^0\, 3'$$

$$\sin \alpha = 0{,}071 = \frac{b}{2s}$$

$$\frac{b}{s} = 0{,}142 = \frac{1}{x}$$

$$x = 7{,}15$$

$$\boldsymbol{b : s = 1 : 7{,}15}$$

$$\eta = \frac{1}{1 + f \cot \alpha} = \frac{1}{1 + 0{,}18 \cdot \cot 4^0\, 3'}$$

$$\eta \sim \mathbf{0{,}274}$$

§ 43. Die Reibungsräder (Friktionsräder).

Bei den Reibungsrädern erfolgt die Arbeitsübertragung durch Aneinanderpressen zweier glatten Oberflächen.

a) Zylindrische Reibungsräder.

Um eine gleichmäßige Arbeitsübertragung mit zylindrischen Reibungsrädern zu bewirken, ist es notwendig, die Räder mit solcher Kraft aneinander zu pressen, daß die in der Berührungslinie ihrer Umfangsflächen erzeugte Reibung wenigstens der am Umfange des getriebenen Rades auftretenden Umfangskraft P gleichkommt, da sonst ein Gleiten eintreten würde. Es muß somit sein

$$P \leqq fQ.$$

Ist dies der Fall, so wickeln sich in der nämlichen Zeit gleiche Umfänge des treibenden und des getriebenen Rades ab, d. h. die Winkelgeschwindig-

keiten der Reibungsräder sind einander gleich. In Fig. 143 sei v die Umfangsgeschwindigkeit des treibenden Rades an seiner Berührungsstelle mit dem getriebenen, P die Umfangskraft daselbst und Q der Druck, mit welchem ersteres

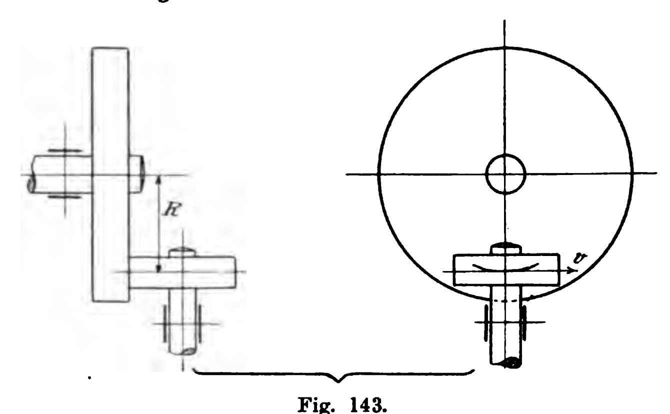


Fig. 143.

gegen letzteres gepreßt wird. Ist ferner f der Reibungskoeffizient, dann ergibt sich, da

$$\frac{P \cdot v}{75} = N \quad \text{und} \quad P = \frac{75 N}{v} \quad \text{ist,}$$

$$Q \geqq 75 \frac{N}{f \cdot v} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (136)$$

Für Gußeisen auf Gußeisen . . . . $f = 0{,}1 \div 0{,}15$
„ „ „ Papier . . . . $f = 0{,}15 \div 0{,}20$
„ „ „ Leder . . . . $f = 0{,}2 \div 0{,}3$
„ „ „ Holz . . . . $f = 0{,}2 \div 0{,}5$
„ Holz auf Holz (mit ∥ Fasern) . . . $f = 0{,}62$
„ „ „ „ (mit ⊥ Fasern) . . . $f = 0{,}54$.

Durch die Pressung des einen Rades gegen das andere entstehen die Zapfenreibungsmomente

$$M_1 = \varphi Q r_1$$
$$M_2 = \varphi Q r_2.$$

Für Überwindung dieser Zapfenreibungsmomente müssen an den Radumfängen die Kräfte wirken

$$P_1 = \frac{\varphi Q r_1}{R_1}$$
$$P_2 = \frac{\varphi Q r_2}{R_2}.$$

Demnach ist der auf den Scheibenumfang übertragene Kraftverlust, verursacht durch die Zapfenreibung,

$$P' = P_1 + P_2 = \varphi Q \left(\frac{r_1}{R_1} + \frac{r_2}{R_2} \right) \quad \ldots \ldots \quad (137)$$

b) Keilräder.

Der Anpressungsdruck bei zylindrischen Reibungsrädern wird schon bei Übertragung einer kleinen Leistung recht groß. Das rührt daher, daß die sich berührenden Flächen bei solchen Rädern klein sind und die entstehende Reibung also nur gering sein kann. Wesentlich größere Reibung wird erzielt, wenn man die beiden Radumfänge keilförmig ineinandergreifen läßt, was zur Konstruktion der sogenannten Keilräder geführt hat. Die letzteren wurden von Robertson erfunden und heißen nach ihm auch **„Robertsonsche Räder"**.

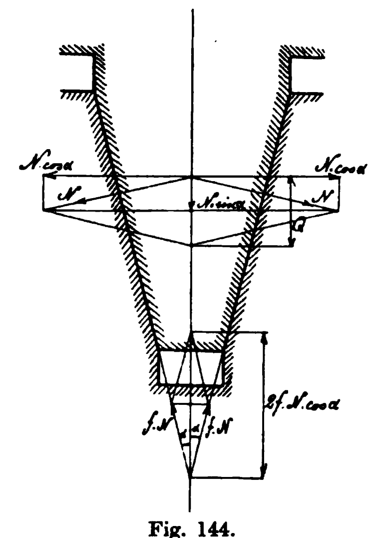


Fig. 144.

Es bedeuten in Fig. 144 .... N die nötigen Normaldrücke auf beide Keilflächen und α den halben Keilwinkel. Die Kraft Q, mit welcher die Keilräder ineinandergepreßt werden müssen, hat einerseits die Drücke N zu erzeugen, andrerseits die Reibung, welche dem Eindringen des einen Keilrades in das andere entgegenwirkt, zu überwinden.

Um die Drücke N zu erzeugen, ist die Kraft

$$2\,N \sin\alpha$$

nötig und um genannte Reibung zu überwinden, die Kraft

$$2\,f\,N \cos\alpha$$

nötig. Somit im ganzen

$$Q \geqq 2\,N\,(\sin\alpha + f\cos\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (138)$$

Da hier die Umfangskraft $P \leqq f \cdot 2\,N$ sein muß, folgt

$$P \leqq f \cdot 2\,\frac{Q}{2\,(\sin\alpha + f\cos\alpha)} \text{ oder}$$

$$P \leqq \frac{f\,Q}{\sin\alpha + f\cos\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (139)$$

Die Reibung $2\,fN$ greift am Radius R an, hat also das Moment

$$2\,f\,N \cdot R.$$

Dasselbe muß mindestens gleich dem zu übertragenden Momente $M = P \cdot R$ sein, so daß sich ergibt

$$2\,fN \cdot R \geqq P \cdot R$$

$$N \geqq \frac{P}{2\,f} \text{ und aus (138)}$$

$$Q \geqq \frac{P}{f}\,(\sin\alpha + f\cos\alpha) \quad . \; . \quad (138\,a)$$

Gewöhnlich gibt man Keilrädern 5 Nuten und macht $\alpha \sim 7^1/_2{}^0$ bis 15^0 — für Gußeisen auf Gußeisen ist $f \sim 0{,}125$ —.

c) Kegelförmige Reibungsräder.

Solche sind in Fig. 145 dargestellt. Es gilt wieder Formel (139), nur bedeutet α den halben Winkel an der Spitze des kleineren Kegels.

Je kleiner Winkel α ist, desto geringer wird auch die nötige Einrückkraft.

Beispiele.

165. Ein treibendes, zylindrisches Reibungsrad hat an der Berührungsstelle mit dem getriebenenen die Umfangsgeschwindigkeit $v = 2$ m und hat 1 PS zu

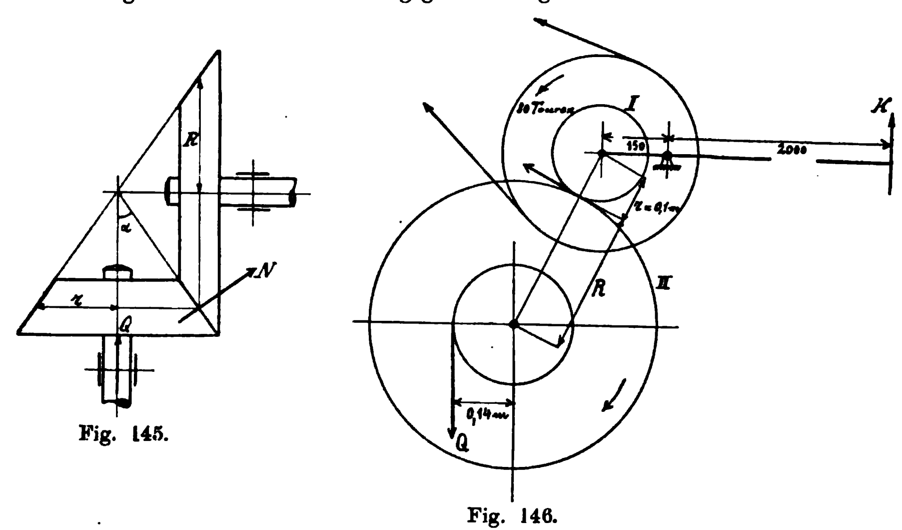


Fig. 145.

Fig. 146.

übertragen. Mit welcher Kraft muß dieses Rad an das letztere angedrückt werden? f — 0,17.

Auflösung:

$$Q \geqq 75 \frac{N}{f \cdot v} \geqq \frac{75 \cdot 1}{0{,}17 \cdot 2} \geqq \frac{75}{0{,}34}$$

$$Q \geqq 220 \text{ kg}$$

166. Wie groß muß der Anpressungsdruck für Keilräder, bei denen $\alpha = 7^1/_2{}^0$ ist, sein? $f = 0{,}125$.

Auflösung:

$$Q \geqq \frac{P}{f} (\sin\alpha + f\cos\alpha) \geqq \frac{P}{0{,}125} (0{,}130 + 0{,}125 \cdot 0{,}991)$$

$$Q \geqq 2\,P$$

167. In welchem Verhältnisse stehen bei Reibungskegelrädern, bei denen sich die Radien r und R wie 1 : 4 verhalten, Umfangskraft P und Anpressungsdruck Q, wenn $f = 0{,}1$ ist?

Auflösung:

$$\operatorname{tg}\alpha = 0{,}25$$

$$\alpha \sim 14^0$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{f}{\sin 14 + f\cos 14} = \frac{0{,}1}{0{,}242 + 0{,}1 \cdot 0{,}97} = \frac{0{,}1}{0{,}339}$$

$$\frac{P}{Q} \sim \frac{1}{3{,}39}$$

168. Welche Kraft ist am rechten Ende des Hebels der in Fig. 146 gezeichneten **Sackwinde** mit den Keilrädern I und II nötig, wenn mittels derselben eine Last von $Q = 400$ kg mit einer Geschwindigkeit $v = 0{,}295$ m/sek. gleichförmig gehoben werden soll? Das Keilrad I wird mit 80 Touren angetrieben. Radius der Lasttrommel ist 140 mm, Radius des Keilrades I ist 100 mm, die Arme des Hebels sind 150 mm und 2000 mm, $f = 0{,}15$ und $\alpha \sim 10^0$.

Auflösung: Die Umfangsgeschwindigkeit der Windentrommel ist

$$\frac{0{,}28\,\pi\,n}{60} = 0{,}295$$

$$\text{daraus } n = \frac{0{,}295 \cdot 60}{0{,}28\,\pi} \sim 20$$

Dieselbe Tourenzahl hat das auf der Windentrommelwelle sitzende Keilrad II. — Die Übersetzung an den Keilrädern ist

$$y = \frac{20}{80} = \frac{1}{4}$$

daher ist der Radius des Keilrades II ... $R = 400$ mm. Die Umfangskraft am Rade II bestimmt sich aus

$$P \cdot 0{,}4 = Q \cdot 0{,}14$$

$$P = \frac{400 \cdot 0{,}14}{0{,}4} = 140 \text{ kg}$$

Die Anpressung der Räder muß erfolgen mit einem Drucke

$$Q \geqq \frac{P}{f} (\sin\alpha + f\cos\alpha)$$

$$Q \geqq \frac{140}{0{,}15} (\sin 10^0 + 0{,}15 \cos 10^0)$$

$$Q \geqq \frac{140}{0{,}15} (0{,}174 + 0{,}15 \cdot 0{,}985)$$

$$Q \geqq \frac{140}{0{,}15} \cdot 0{,}321 \sim 300 \text{ kg}$$

Dann ergibt sich endlich die Kraft K aus

$$K \cdot 2 = Q \cdot 0{,}15$$

$$K = \frac{300 \cdot 0{,}15}{2} = \frac{45}{2}$$

$$\boldsymbol{K \sim 22{,}5 \text{ kg}}$$

§ 44. Die Schraube.

Eine Last durch eine am Umfange einer Schraube wirkende Kraft heben, Fig. 147, ist dasselbe, als diese durch eine horizontal wirkende Kraft eine schiefe Ebene mit der Basis $2r\pi$ und der Höhe h hinaufzuziehen. Dann folgt

$$P = Q \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$$

Soll die Schraube **„selbsthemmend"** sein, so muß noch eine Kraft P nach entgegengesetzter Richtung aufgewendet werden, damit die Last zum Sinken gebracht wird, d. h. es muß sein

$$P = Q \cdot \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)$$

Die Bedingung für die Selbsthemmung ist

$$\alpha < \varphi \quad \ldots\ldots \quad (140)$$

„Der **Steigungswinkel der Schraube** muß kleiner sein als der **Reibungswinkel.**"

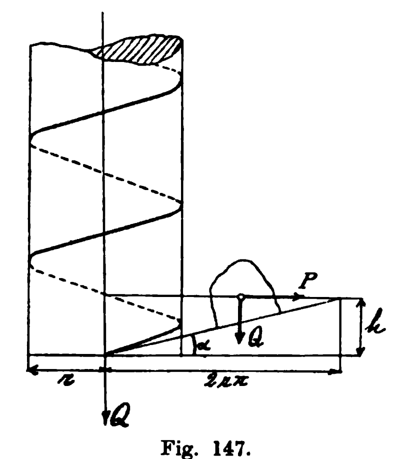


Fig. 147.

Sitzt auf der Spindel ein Handrad mit dem Radius R, so ist zum Heben der Last am Umfange desselben eine Kraft P_1

$$P_1 = \frac{R}{r} Q \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (141)$$

nötig. — Soll die Ganghöhe der Schraube in der Formel auftreten, dann ist

$$P_1 = \frac{r}{R} Q \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\varphi} = \frac{r}{R} Q \frac{\operatorname{tg}\alpha + f}{1 - f \operatorname{tg}\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{2r\pi}$$

$$P_1 = \frac{r}{R} Q \cdot \frac{\frac{h}{2r\pi} \pm f}{1 \mp f \cdot \frac{h}{2r\pi}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (142)$$

Das Pluszeichen gilt für Heben, das Minuszeichen für Senken der Last.

Ohne Rücksicht auf Reibung ergibt sich die zum Heben der Last Q am Umfange der Schraube nötige Kraft mit $Q \cdot \operatorname{tg}\alpha$, mit Rücksicht auf dieselbe mit $Q \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$.

„Das Verhältnis der am Umfange der Schraube zum Heben der Last nötigen theoretischen zu der dort nötigen praktischen Kraft heißt der **Wirkungsgrad der Schraube.**"

Derselbe ist also

$$\eta = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (143)$$

Der Wirkungsgrad η wird kleiner, wenn bei gleichem α der Reibungswinkel φ größer wird. Schwieriger zu erkennen ist, wie sich η mit α bei konstant bleibendem φ ändert.

Wenn φ z. B. 10^0 und konstant ist, folgt

$$\text{bei } \alpha = 10^0,\ 20^0,\ 30^0,\ 40^0,\ 50^0,\ 60^0,\ 70^0$$
$$\eta = 0{,}48,\ 0{,}63,\ 0{,}69,\ 0{,}71,\ 0{,}69,\ 0{,}63,\ 0{,}48.$$

D. h. laut tabellarischer Aufstellung liegt der günstigste Wirkungsgrad η bei $\alpha \sim 40^0$. — Mit Hilfe der höheren Mathematik kann gezeigt werden, daß η ein Maximum wird für

$$\alpha = 45 - \frac{\varphi}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (144)$$

Dann ergibt sich

$$\eta_{max} = \frac{\operatorname{tg}\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(45 - \frac{\varphi}{2} + \varphi\right)} = \frac{\operatorname{tg}\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{\operatorname{tg}\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)}{\cot\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$\eta_{max} = \frac{\dfrac{\sin\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)}}{\dfrac{\cos\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)}} = \frac{\sin^2\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos^2\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$\eta_{max} = \frac{1 - \cos(90 - \varphi)}{1 + \cos(90 + \varphi)}$$

$$\eta_{max} = \frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (145)$$

Beispiele.

169. Der mittlere Radius einer Schraube ist 3 cm, die Ganghöhe 1 cm, der Reibungskoeffizient $f = 0{,}14$. — Welche Last kann mit 50 kg an einem Handrad auf der Schraube von $R = 0{,}6$ m gehoben werden?

Auflösung: $$P = \frac{r}{R} Q \frac{\frac{h}{2r\pi} + f}{1 - f\frac{h}{2r\pi}} = \frac{3}{60} Q \frac{\frac{1}{6\pi} + 0{,}14}{1 - 0{,}14 \cdot \frac{1}{6\pi}} = 50$$

$$Q = \frac{50 \cdot 60}{3} \cdot \frac{6\pi - 0{,}14}{1 + 6\pi \cdot 0{,}14} = \frac{1000 \cdot 18{,}66}{3{,}64}$$

$$Q \sim 5140\,\text{kg}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{2r\pi} = \frac{1}{6\pi} \sim 0{,}053$$

$$\alpha = 3^0 2' 12''$$

$$\operatorname{tg}\varphi = 0{,}14;\ \varphi = 7^0 58' 11''$$

$$\alpha < \varphi,$$

d. h. die Schraube ist selbsthemmend.

170. Welche Last kann mit einer Schraube, deren innerer Durchmesser 40 mm, deren äußerer Durchmesser 50 mm und deren Ganghöhe 15,7 mm sind, gehoben werden, wenn die Umfangskraft an dem auf ihr sitzenden Handrad von 450 mm Durchmesser 10 kg beträgt? $f = 0{,}105$.

Auflösung: Der mittlere Durchmesser der Schraube ist 45 mm, daher wird

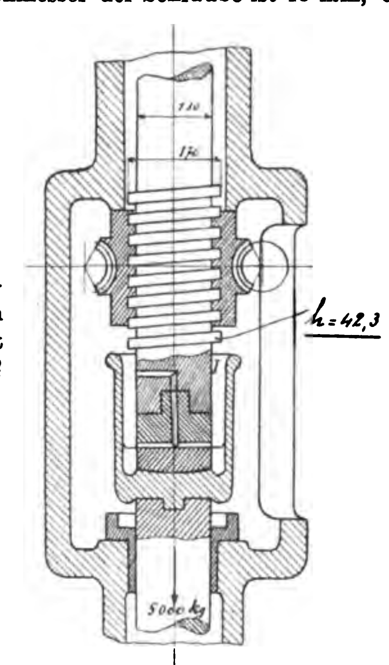
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{15{,}7}{45\pi} = 0{,}111; \quad \alpha \sim 6^0 20'$$

$$\operatorname{tg}\varphi = 0{,}105; \quad \varphi \sim 6^0$$

$$P = \frac{r}{R} Q \cdot \operatorname{tg} 12^0 20'$$

$$Q = \frac{P \cdot R}{r \cdot \operatorname{tg} 12^0 20'} = \frac{10 \cdot 0{,}45}{0{,}0225 \cdot 0{,}218}$$

$$Q \sim \mathbf{920\ kg}$$



171. Die Schraube eines Schnekkentriebes hat die Dimensionen $r = 11$ cm, $h = 13$ cm. Wie groß ist ihr Wirkungsgrad, wenn $f = 0{,}15$ ist?

Auflösung:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{2r\pi} = \frac{13}{22\pi} = 0{,}188$$

$$\alpha = 10^0 40'$$

$$f = 0{,}15$$

$$\varphi = 8^0 32'$$

$$\eta = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} = \frac{\operatorname{tg} 10^0 40'}{\operatorname{tg} 19^0 12'}$$

$$\eta = \frac{0{,}188}{0{,}349}$$

$$\eta = \mathbf{0{,}54}$$

172. Welche Kraft P ist am Handrad nach gegebener Skizze zum Heben der Turbinenhohlwelle nötig? $f = 0{,}105$. Fig. 148.

Auflösung:

Spindel I: Dchm. außen 170 mm; Dchm. innen 130 mm; Steigung 42,3 mm

Spindel II: Dchm. außen 110 mm; Dchm. innen 90 mm; Steigung 28,3 mm

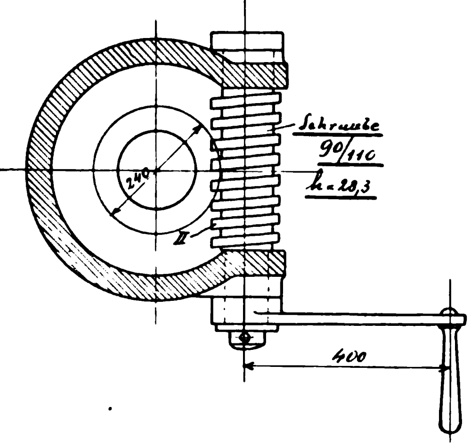


Fig. 148.

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{42{,}3}{150\pi} = 0{,}09; \quad \alpha_1 = 5^0 10'$$

$$f = 0{,}105; \quad \varphi = 6^0$$

P_1 am Umfange der Spindel I ist

$$P_1 = 5000 \cdot \operatorname{tg} 11^0 10'$$

$$P_1 = 5000 \cdot 0{,}1975$$

$$P_1 \sim 987{,}5\ \text{kg}$$

Reduziert auf den Umfang des Schneckenrades wird die nötige Kraft

$$P_2 = 987{,}5 \cdot \frac{150}{240} \sim 620\ \mathrm{kg}$$

Demnach an der Kurbel nötig

An Spindel II ist $\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{28{,}3}{100\,\pi} = 0{,}09;\ \alpha_2 = 5^0\,10'$

$$P = 620 \cdot \operatorname{tg} 11^0\,20' \cdot \frac{50}{400} = 620 \cdot 0{,}1975 \cdot \frac{1}{8}$$

$$\boldsymbol{P \sim 15\ \mathrm{kg}}$$

173. Wie groß muß an einer Schraube mit $\alpha = 42^0$, $\varphi = 6^0$ und $\frac{R}{r} = \frac{1}{20}$ das Verhältnis $\frac{P}{Q}$ sein, damit a) eine gleichförmige Hebung der Last möglich sei, b) das Sinken der Last verhindert werde? Wie groß ist ferner der Wirkungsgrad der Schraube?

Auflösung: ad a) $\frac{P}{Q} = \frac{r}{R} \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) = \frac{1}{20} \operatorname{tg} 48^0 = \frac{1{,}1106}{20} = \frac{1}{\frac{20}{1{,}1106}}$

$$\boldsymbol{\frac{P}{Q} = \frac{1}{17{,}9}}$$

ad b) $\frac{P}{Q} = \frac{r}{R} \operatorname{tg}(\alpha - \varphi) = \frac{0{,}72654}{20} = \frac{1}{\frac{20}{0{,}72654}}$.

$$\boldsymbol{\frac{P}{Q} = \frac{1}{27{,}6}}$$

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} = \frac{0{,}8693}{1{,}1106}$$

$$\boldsymbol{\eta = 0{,}778}$$

174. Das Schraubenschneiden auf der Drehbank. Fig. 149. Von der Drehbankspindel wird die Leitspindel mittels der Räder a, b, c, d angetrieben. a, b, c, d bedeuten gleichzeitig die Zähnezahlen dieser Räder. Von letzteren sind b und c auswechselbar (Wechselräder). Macht nun die Drehbankspindel s Umdrehungen, so besitzt die Leitspindel

$$l = s \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$$

Umdrehungen, so daß sich ergibt

$$\frac{l}{s} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

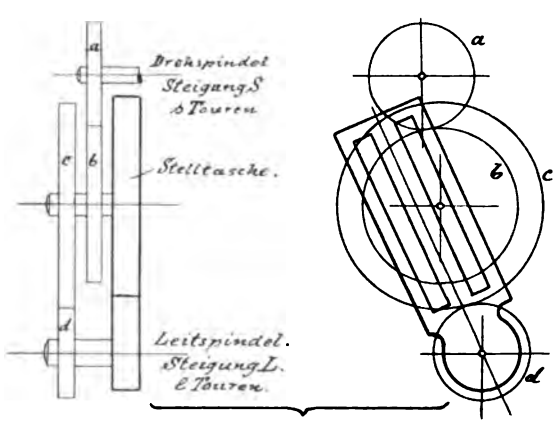


Fig. 149.

Es ist nun leicht einzusehen, daß die Verschiebung des Supportes pro Umdrehung der Leitspindel um so größer wird, je größer der Wert $\frac{ac}{bd}$ ist. —

Die Verschiebung des Supportes ist aber gleich der Steigung der zu schneidenden Schraube und auch gleich der Steigung der Leitspindel L mal der auf eine Drehung der Drehbankspindel entfallende Drehung der Leitspindel, d. i. $\frac{L}{S}$,

mithin ist $$S = L \cdot \frac{l}{s}, \text{ also}$$

$$S = \frac{ab}{cd} \cdot L \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (146)$$

175. Auf einer Drehbank mit einer Leitspindel, bei der 3 Gänge auf einen Zoll gehen, soll eine Schraube geschnitten werden, welche 5 Gänge auf einen Zoll hat. Vorhanden sind die Räder a und d mit 24 und 20 Zähnen. Welche Wechselräder sind in die Stelltasche zu geben?

Auflösung: $$\frac{S}{L} = \frac{ab}{cd} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{5} = \frac{30}{50} = \frac{5 \cdot 6}{10 \cdot 5} = \frac{24}{20} \cdot \frac{5}{10}$$

Die Zähnezahlen der zu nehmenden Wechselräder sind z. B.

$$\boldsymbol{b = 30 \text{ und } c = 60}$$

oder $$\boldsymbol{b = 25 \text{ und } c = 50}$$

§ 45. Die Seilreibung.

An den freien Enden eines biegsamen Fadens, Fig. 150, welcher um einen festen Zylinder gelegt ist und den Bogen $\widehat{\alpha}$ umspannt, herrschen die Spannungen t und T. Soll nun unter Rücksichtnahme auf den Reibungswiderstand W die geringste Vermehrung von T eine Bewegung in der Richtung von T zur Folge haben, so muß gelten

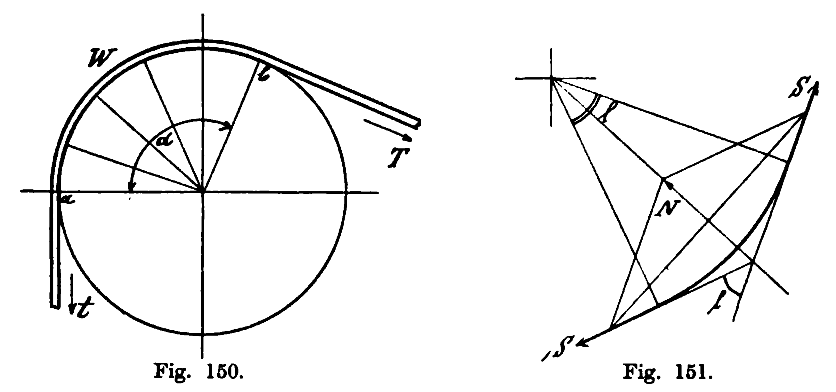


Fig. 150. Fig. 151.

$$T = t + W \quad \text{oder}$$
$$W = T - t$$

Der Reibungswiderstand ändert sich mit dem von a bis b stets wachsenden Normaldruck.

Teilt man α in unendlich viele Teile, n an der Zahl, so ist ein solcher $\gamma = \frac{\alpha}{n}$. Dadurch zerfällt der Faden in n gleich lange Teilchen, an deren Enden die Spannungen S und S' seien, Fig. 151. Die Resultierende der beiden ist der Normaldruck an der betreffenden Stelle des Zylinders. Je kleiner das betrachtete Fadenstückchen ist, desto weniger unterscheidet sich S von S', desto mehr nähert sich das Kräfteparallelogramm einem Rhombus. Dann ist

$$N = 2\,S \cdot \sin\frac{\gamma}{2} = 2\,S \cdot \sin\frac{\alpha}{2\,n}.$$

Da $\quad \sin\frac{\alpha}{2\,n} \sim \frac{\alpha}{2\,n}\quad$ ist, folgt

$$N = S \cdot \frac{\alpha}{n} \quad \text{und} \quad W = f \cdot S \cdot \frac{\alpha}{n}$$

$$S' = S + W = S\left(1 + f \cdot \frac{\alpha}{n}\right)$$

Im Anfangspunkte a besteht die Beziehung

$$S_1 = t\left(1 + f\,\frac{\alpha}{n}\right).$$

Im nächsten Fadenelemente wird entsprechend

$$S_2 = S_1\left(1 + f\,\frac{\alpha}{n}\right) = t\left(1 + f\,\frac{\alpha}{n}\right)^2$$

Weiter ist $\quad S_3 = t\left(1 + f \cdot \frac{\alpha}{n}\right)^3$

Endlich wird $\quad S_n = T = t\left(1 + f\,\frac{\alpha}{n}\right)^n$, wobei $n = \infty$ ist.

Es ist nun der Grenzwert $\left(1 + f\,\frac{\alpha}{n}\right)^n$ für $n = \infty$ zu suchen.

Laut $(a+b)^n = a^n + n \cdot a^{n-1} \cdot b + \frac{n\,(n-1)}{1 \cdot 2}\,a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots + b^n$ wird

$$\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = 1 + z \cdot \frac{1}{z} + \frac{z\,(z-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{z^2} + \frac{z\,(z-1)\,(z-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{z^3} + \ldots$$

$$= 1 + 1 + \frac{z\,(z-1)}{1 \cdot 2 \cdot z^2} + \frac{z\,(z-1)\,(z-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot z^3} + \ldots\ldots\ldots$$

$$= 1 + 1 + \frac{1 - \frac{1}{z}}{1 \cdot 2} + \frac{\left(1 - \frac{1}{z}\right)\left(1 - \frac{2}{z}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\text{Nun} \lim_{z=\infty}\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots\ldots$$

$$= 2 + 0{,}5 + 0{,}166 + 0{,}04166 + \ldots\ldots$$

$$\lim_{z=\infty}\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = 2{,}71828\ \ldots = e$$

Für $z = \frac{n}{f\alpha}$ gesetzt, ergibt sich letzterer Wert als

$$\lim_{z=\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z = \lim\left[1+\frac{1}{\frac{n}{f\alpha}}\right]^{\frac{n}{f\alpha}} = \lim\left\{\left[1+\frac{1}{\frac{n}{f\alpha}}\right]^n\right\}^{\frac{1}{f\alpha}} = e$$

d. h. $$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{f\alpha}}\right)^n = e^{f\alpha}$$

Daher $$T = t \cdot e^{f\alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (147)$$

und $$W = t \cdot (e^{f\alpha} - 1) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (148)$$

Die Spannung T und der Widerstand W sind unabhängig vom Zylinderhalbmesser, wachsen aber mit der Größe des umspannten Bogens.

Beispiele.

176. Die Last $G = 600$ kg soll mittels eines um einen festen Zylinder $1^1/_2$ mal geschlungenen Seils gleichförmig heruntergelassen werden. Mit welcher Kraft ist das freie Seilende zu halten, wenn der Reibungskoeffizient zwischen Zylinder und Seil $f = 0{,}4$ ist?

Auflösung: $$600 = T = t \cdot e^{f\alpha}$$

$$t = \frac{T}{e^{f\alpha}} = \frac{600}{2{,}718^{0{,}4\cdot 3\pi}} = \frac{600}{2{,}718^{1{,}2\pi}} = \frac{600}{43{,}2}$$

$$\boldsymbol{t = 13{,}9 \text{ kg}}$$

177. Welche Last kann mit 1 kg durch ein um einen horizontalen, festen Zylinder gelegtes Seil gehalten werden, wenn $\alpha = 1440^0\ (8\pi)$ und $f = \frac{1}{3}$ ist?

Auflösung: $$T = 1 \cdot 2{,}718^{0{,}333\cdot 8\pi} = 2{,}718^{2{,}664\pi}$$

$$\boldsymbol{T \sim 4350 \text{ kg}}$$

§ 46. Die Bandbremsen.

Im § 45 wurden die Endspannungen t und T an den beiden Enden eines um einen festliegenden Zylinder gelegten Seiles so bestimmt, daß die größere Zugkraft ein gleichförmiges Hingleiten desselben über den Zylinder herbeizuführen imstande war.

Die Gleichgewichtsbedingung $T = t \cdot e^{f\alpha}$ bleibt dann auch noch bestehen, wenn das Band mit den Endspannungen festliegt und der Zylinder gegen die Spannung T hin rotiert, Fig. 152. Diese Tatsache wird praktisch bei den Bandbremsen ausgenützt, um die Abwärtsbewegung einer Last zu verlangsamen, bzw. vollständig aufzuheben.

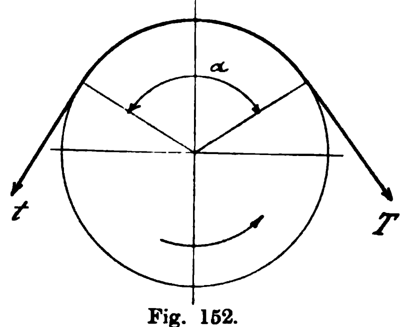


Fig. 152.

a) Die einfache Bandbremse.

Eine solche ist aus Fig. 153 ersichtlich. Wird das Ende des Bremshebels nach abwärts gedrückt, so entsteht im linken Bandende die größere Spannung. Der Widerstand gegen die Lastbewegung ist links gerichtet. Nun ist

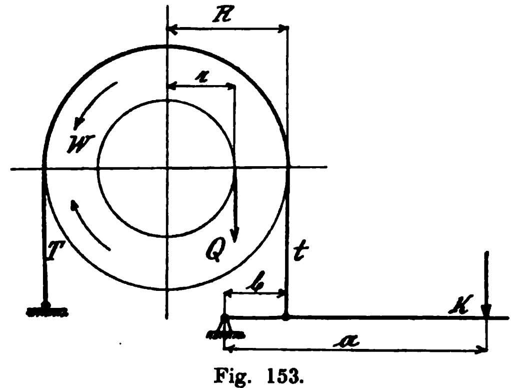


Fig. 153.

$$W = T - t = t\,(e^{fa} - 1)$$

Gleichgewicht ist vorhanden, wenn die Bedingung gilt

$$Q \cdot r = W \cdot R$$

$$W = Q\frac{r}{R}$$

$$W = Q\frac{r}{R} = t\,(e^{fa} - 1),$$

woraus

$$t = Q\frac{r}{R} \cdot \frac{1}{e^{fa} - 1} \quad \text{folgt.}$$

Da ferner

$$t \cdot b = K \cdot a$$

sein muß, ergibt sich $Q\frac{r}{R} \cdot \frac{1}{e^{fa} - 1} b = Ka$ und somit

$$K = \frac{b}{a} \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{Q}{e^{fa} - 1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (149)$$

Andere Anordnungen von einfachen Bandbremsen geben Fig. 154a und 154b.

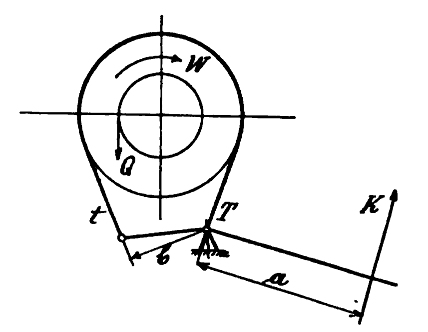


Fig. 154a.

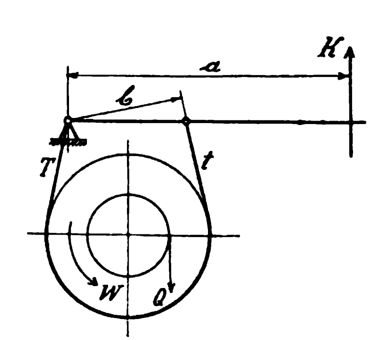


Fig. 154b.

b) Die Differentialbremse.

Dieselbe ist in Fig. 155 gezeichnet. Wieder wird

$$W = T - t = t\,(e^{fa} - 1)$$

$$W \cdot R = Q \cdot r$$

$$W = Q\frac{r}{R} = t \cdot (e^{fa} - 1)$$

$$t = \frac{r}{R} \cdot \frac{Q}{e^{fa} - 1}$$

Gleichgewicht am Bremshebel ist nun vorhanden, wenn die Summe der Momente in bezug auf seinen Drehpunkt gleich Null ist.

$$K \cdot a = t \cdot b_2 - T \cdot b_1$$

$$K \cdot a = t\,(b_2 - b_1 \cdot e^{f\alpha})$$

$$K \cdot a = \frac{r}{R}\, Q\, \frac{b_2 - b_1 e^{f\alpha}}{e^{f\alpha} - 1}$$

$$K = \frac{1}{a} \cdot \frac{r}{R}\, Q\, \frac{b_2 - b_1 e^{f\alpha}}{e^{f\alpha} - 1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (150)$$

Der Reibungskoeffizient zwischen Stahlband und Gußeisenscheibe beträgt $f = 0{,}18$.

Die Bremse ist **„selbsttätig"**, wenn $K = 0$ ist.

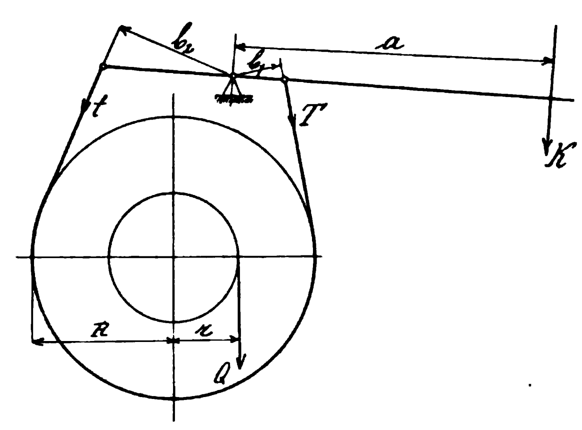


Fig. 155.

Die Bedingung für die Selbsthemmung ist

$$b_2 = b_1 \cdot e^{f\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (151)$$

für $\alpha =$	$0{,}2\pi$	$0{,}4\pi$	$0{,}6\pi$	$0{,}8\pi$	$0{,}85\pi$	$0{,}9\pi$	$0{,}95\pi$	π	$1{,}05\pi$
wird $e^{f\alpha} =$	1,12	1,25	1,4	1,57	1,62	1,66	1,71	1,76	1,81
für $\alpha =$	$1{,}1\pi$	$1{,}2\pi$	$1{,}3\pi$	$1{,}4\pi$	$1{,}5\pi$	$1{,}6\pi$	$1{,}7\pi$	$1{,}8\pi$	2π
wird $e^{f\alpha} =$	1,86	1,97	2,09	2,21	2,34	2,47	2,61	2,77	3,1

c) Die Schraubenbremse.

Der Anzug des Bremsbandes wird hier, Fig. 156, durch eine Schraube bewirkt, weshalb diese Bremse Schraubenbremse genannt werden kann.

Es seien r der Radius der Lasttrommel,
R der Radius der Bremsscheibe,
r_1 der Radius der Schraube,
α_1 der Steigungswinkel der Schraube,
R_1 der Radius des Handrades auf der Schraube,
P die Kraft am Umfange des Handrades,
φ_1 der Reibungswinkel für die Schraube.

Dann wird $$W \cdot R = Q \cdot r$$

$$W = Q \frac{r}{R} = T - t = t\,(e^{f\alpha} - 1)$$

$$t \cdot \operatorname{tg}(\alpha_1 + \varphi_1) \cdot \frac{r_1}{R_1} = P$$

$$t = \frac{P \cdot R_1}{r_1 \operatorname{tg}(\alpha_1 + \varphi_1)}$$

$$W = \frac{P \cdot R_1}{r_1 \operatorname{tg}(\alpha_1 + \varphi_1)} \cdot (e^{f\alpha} - 1) = \frac{Qr}{R}$$

$$\boldsymbol{P = \frac{r r_1}{R R_1} Q \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \varphi_1)}{e^{f\alpha} - 1}} \qquad \textbf{(152)}$$

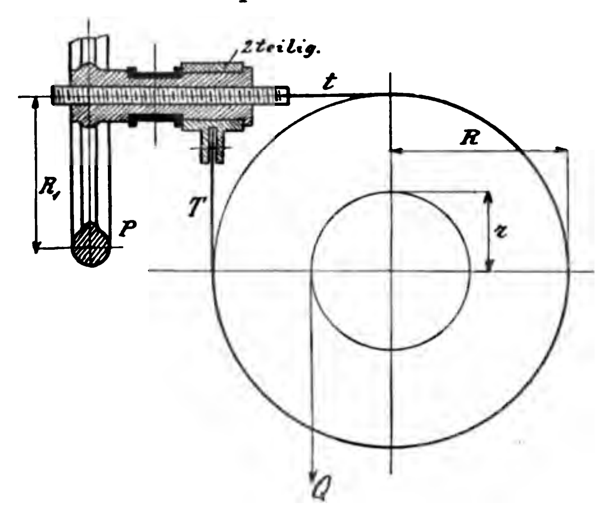


Fig. 156.

Beispiele.

178. Welche Last kann mit einer einfachen Bandbremse gebremst werden, wenn $r = 125$ mm, $R = 280$ mm, $a = 120$ mm, $b = 10$ mm, $f = 0{,}18$, $K = 40$ kg und $\alpha = {}^4/_3\pi$ sind?

Auflösung:

$$K = \frac{b}{a} \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{Q}{e^{f\alpha} - 1}$$

$$Q = K \frac{a}{b} \cdot \frac{R}{r} \cdot (e^{f\alpha} - 1)$$

$$Q = 40 \cdot \frac{0{,}12}{0{,}01} \cdot \frac{0{,}28}{0{,}125} \cdot (e^{0{,}18 \cdot \frac{4}{3}\pi} - 1)$$

$$\boldsymbol{Q \sim 1210\,\mathrm{kg}}$$

179. An einer Differentialbremse sind der Hebelarm der Last 200 mm, der Radius der Bremsscheibe 600 mm, der Hebelarm der Kraft 400 mm, die Last 1000 kg, der umspannte Bogen der Bremsscheibe $0{,}7 \cdot 2\pi$, die Hebelarme

der größeren und der kleineren Bandspannung 50 mm und 130 mm. — Wie groß ist die zum Bremsen der Last erforderliche Kraft?

Auflösung:

$$K = \frac{1}{400} \cdot \frac{200}{600} \cdot 1000 \frac{130 - 50 \cdot 2{,}21}{1{,}21} = \frac{19{,}5 \cdot 10}{1{,}21}$$

$$\mathbf{K = 13{,}4\ kg}$$

180. Wie groß mußte dagegen in voriger Aufgabe der Hebelarm der größeren Bandspannung sein, damit die Bremse selbsttätig werde?

Auflösung: $b_2 = b_1 e^{f\alpha} = 50 \cdot 2{,}21$

$$\mathbf{b_2 = 110{,}5\ mm}$$

181. Die Kraft K am Hebel der in Fig. 135 dargestellten Differentialbremse zu bestimmen.

Auflösung: Die Umfangskraft an der Bremsscheibe ergibt sich unter der Erwägung, daß der Wirkungsgrad eines Rädervorgeleges $\eta = 0{,}9$ beträgt mit

$$P = \frac{Q \cdot 330}{z_4 \cdot t_4} \cdot \frac{z_3 \cdot t_3}{580 \cdot \eta}$$

$$P = \frac{1500 \cdot 330}{65 \cdot 40} \cdot \frac{13 \cdot 40}{580 \cdot 0{,}9} = \frac{170}{0{,}9}$$

$$P \sim 190\ \text{kg}$$

$$K_1 = \frac{1}{500} \cdot 190 \cdot \frac{150 - 70 \cdot 1{,}97}{0{,}97}$$

$$K_1 = \frac{190 \cdot 12{,}1}{500 \cdot 0{,}97}$$

$$\mathbf{K_1 \sim 4{,}75\ kg}$$

182. In welchem Verhältnisse stehen an einer Schraubenbremse P und Q, wenn

$r = 100$ mm	$R = 300$ mm	$\alpha_1 = \varphi_1 = 9^0\,30'$	$f = 0{,}18$
$r_1 = 15$ mm	$R_1 = 120$ mm	$\alpha = 1{,}4\pi$	

betragen?

Auflösung:

$$\frac{P}{Q} = \frac{r r_1}{R R_1} \cdot \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \varphi_1)}{e^{f\alpha} - 1}$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}015}{0{,}3 \cdot 0{,}12} \cdot \frac{\operatorname{tg} 19^0}{2{,}21 - 1}$$

$$\mathbf{\frac{P}{Q} = \frac{1}{84}}$$

§ 47. Die Backenbremsen.

Sie beruhen auf den Gesetzen der gleitenden Reibung.

a) Der Drehpunkt des Bremshebels liegt in der Tangente an die Bremsscheibe. Fig. 157.

Wird der Bremshebel an die Scheibe angedrückt, so entsteht die Reaktion N. — Gleichgewicht ist vorhanden, wenn die Bedingung besteht

$$N \cdot b = K(a + b),$$

daraus ist

$$N = \frac{a+b}{b} \cdot K$$

Der Reibungsbetrag am Umfang der Bremsscheibe ergibt sich dann mit

$$W = fN = f\frac{a+b}{b} \cdot K.$$

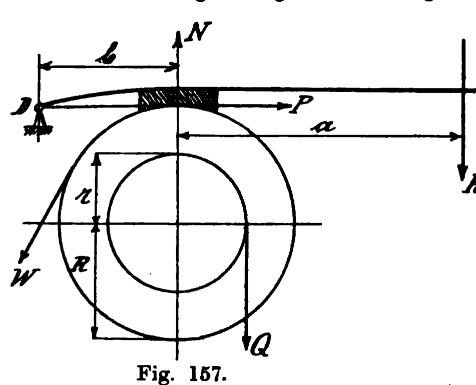


Fig. 157.

Damit Bremsen eintritt, muß $P = W$ sein.

Nun ist

$$P \cdot R = Q \cdot r,$$

daher

$$P = Q\frac{r}{R},$$

also

$$Q\frac{r}{R} = f\frac{a+b}{b} \cdot K$$

$$K = \frac{r}{R} \cdot \frac{b}{a+b} \cdot \frac{Q}{f} \quad (153)$$

b) Der Drehpunkt des Bremshebels liegt oberhalb der Tangente an die Bremsscheibe. Fig. 158.

Wäre E der Hebeldrehpunkt, dann würde gelten

$$K_1 = \frac{r}{R} \cdot \frac{b}{a+b} \cdot \frac{Q}{f}$$

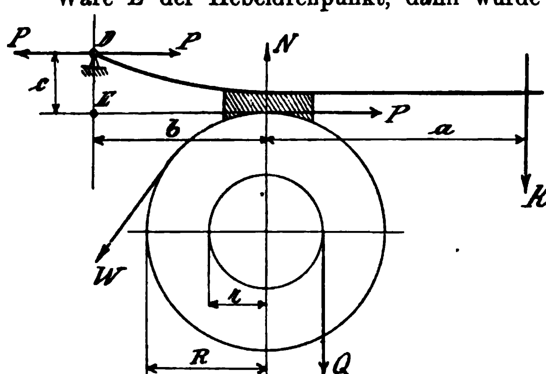


Fig. 158.

Da aber der Drehpunkt in D ist, tritt ein Kräftepaar $P \cdot c$ auf, dessen Moment $P \cdot c$ ebenfalls durch Bremsen aufgehoben werden muß. Die hierfür nötige Kraft ist nun aus

$$K_2 (a + b) = P \cdot c = Q\frac{r}{R} \cdot c$$

$$K_2 = \frac{r}{R} \cdot \frac{c}{a+b} \cdot Q$$

Demnach ist die totale Kraft am Bremshebel

$$K = \frac{r}{R} \cdot \frac{b}{a+b} \cdot \frac{Q}{f} + \frac{r}{R} \cdot \frac{c}{a+b} \cdot Q$$

oder

$$K = \frac{r}{R} \cdot \frac{Q}{a+b}\left(\frac{b}{f} + c\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (154)$$

c) Der Drehpunkt des Bremshebels liegt unterhalb der Tangente an die Bremscheibe.

In diesem Falle hilft das Moment $P \cdot c$ der Kraft K

$$K = \frac{r}{R} \cdot \frac{Q}{a+b}\left(\frac{b}{f} - c\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (155)$$

$f = 0{,}5$, wenn Holz auf Eisen und trocken wirkt.

$f = 0{,}15 \div 0{,}1$ für Eisen auf Eisen.

Beispiele.

183. In welchem Verhältnisse stehen K und Q, wenn $r = 100$, $R = 300$, $a = 400$, $b = 75$ mm und $f = 0{,}5$ sind?

Auflösung:

$$\frac{K}{Q} = \frac{100}{300} \cdot \frac{75}{475} \cdot \frac{1}{0{,}5}$$

$$\frac{K}{Q} = \frac{1}{9{,}5}$$

184. Wie groß ist für die Bremse in 183 die Last Q, wenn $K \sim 20$ kg ist?

Auflösung:

$$Q = \frac{20 \cdot 300 \cdot 475 \cdot 0{,}5}{100 \cdot 75}$$

$$Q = 190 \text{ kg}$$

185. Wie groß ist für eine Bremse, bei welcher der Hebeldrehpunkt 30 mm unterhalb der Tangente an die Bremsscheibe liegt, das Verhältnis $\frac{K}{Q}$, wenn a, b, r und R so groß wie in Beispiel 183 sind? Für welchen Wert von c wird ferner die Bremse selbsttätig?

Auflösung:

$$\frac{K}{Q} = \frac{r}{R} \cdot \frac{1}{a+b}\left(\frac{b}{f} - c\right) = \frac{100}{300} \cdot \frac{1}{475} \cdot \left(\frac{75}{0{,}5} - 30\right)$$

$$\frac{K}{Q} = \frac{1}{11{,}9}$$

Die Bedingung für die Selbsttätigkeit der Bremse ist

$$\frac{b}{f} = c$$

$$c = \frac{75}{0{,}5}$$

$$c = 150 \text{ mm}$$

Wenn $c < 150$ mm, ist Bremse nicht selbsttätig. Wird $c > 150$ mm, dann muß man sogar Hebel noch etwas abheben, wenn Gleichgewicht vorhanden sein soll.

---

§ 48. Riemen- und Seilbetrieb.

Während eine **direkte Bewegungsübertragung** von einer auf eine andre Welle durch Stirn-, Kegel-, Schrauben- oder Reibungsräder erfolgt, findet die **indirekte Bewegungsübertragung** durch Riemen- oder Seilbetrieb statt.

a) Riemenbetrieb.

Der Riemenbetrieb wird angewendet, wenn es sich um Übertragung von nicht zu großen Kräften auf nicht zu große Entfernungen handelt.

Ein Riemen ist ein biegsames, an den beiden Enden zusammengefügtes Band ohne Ende. Das Material, aus welchem der Riemen gefertigt ist, ist meist lohgares Leder (seltener Kautschuk, Baumwolle, Drahtgewebe).

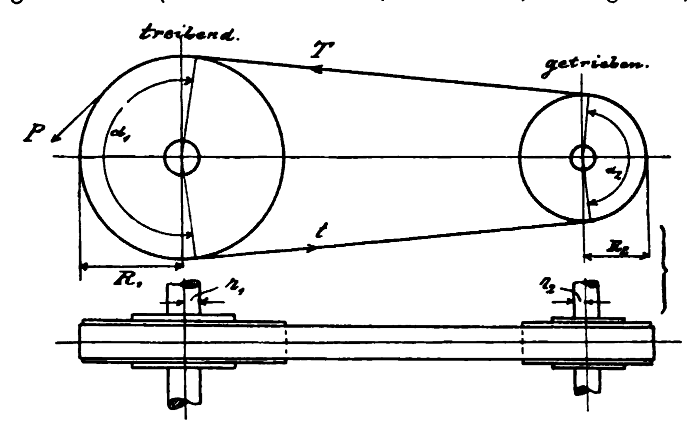


Fig. 159.

Ist der Riemen auf die ruhenden Scheiben aufgelegt, so herrscht in ihm überall die Spannung S. Fig. 159.

Während der Bewegungsübertragung indes wird die Spannung im ziehenden Teil $T > S$, im gezogenen $t < S$. Damit Gleichgewicht vorhanden sei, muß die Umfangskraft P an der treibenden Scheibe gleich sein $T - t$, also

$$P = T - t$$

Nach den Gesetzen der Seilreibung (147) besteht die Beziehung

$T = t \cdot e^{f\alpha}$, so daß sich ergibt

$$P = t \cdot (e^{f\alpha} - 1)$$

Somit resultieren die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} t &= \frac{P}{e^{f\alpha} - 1} \\ T &= \frac{P \cdot e^{f\alpha}}{e^{f\alpha} - 1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (156)$$

Die Spannung S, mit welcher der Riemen auf die Scheiben aufgelegt werden muß, kann man setzen

$$S = \frac{T + t}{2} = \frac{P}{2} \cdot \frac{e^{f\alpha} + 1}{e^{f\alpha} - 1} \quad \ldots\ldots \quad (157)$$

In diesen Gleichungen ist der Einfluß der Fliehkraft auf den Riemenbetrieb nicht berücksichtigt.

Die Zapfen haben je einen Druck $2\,S$ aufzunehmen. Die auf den Umfang der Riemenscheiben reduzierten Reibungswiderstände sind dann

$$p_1 = \frac{2\,S \cdot \varphi \cdot r_1}{R_1} \text{ und } p_2 = \frac{2\,S \cdot \varphi \cdot r_2}{R_2}$$

Demnach ist der durch die Reibungswiderstände in den Zapfen verursachte Kraftverlust

$$p_1 + p_2 = \varphi \cdot 2\,S \cdot \left(\frac{r_1}{R_1} + \frac{r_2}{R_2}\right) \text{ oder}$$

$$\boldsymbol{p_1 + p_2 = \varphi \cdot P \cdot \frac{e^{f\alpha} + 1}{e^{f\alpha} - 1} \cdot \left(\frac{r_1}{R_1} + \frac{r_2}{R_2}\right)} \quad \ldots\ldots \quad \textbf{(158)}$$

Die Größen von $e^{f\alpha}$ sind aus folgender, der Hütte entnommenen Tabelle zu ersehen.

$\frac{\alpha}{2 \cdot \pi}$	Lederriemen auf Scheiben aus: Holz	Gußeisen		
	Zustand des Riemens: etwas gefettet	sehr gefettet	etwas gefettet	feucht
	$f =$ 0,47	0,12	0,28	0,38
0,1	1,34	1,01	1,19	1,27
0,2	1,81	1,16	1,42	1,61
0,3	2,43	1,25	1,69	2,05
0,4	3,26	1,35	2,02	2,60
0,5	4,38	1,46	2,41	3,3
0,6	5,88	1,57	2,81	4,19
0,7	7,90	1,66	3,43	5,32
0,8	10,6	1,83	4,09	6,75
0,9	14,3	1,97	4,87	8,57
1	19,2	2,12	5,81	10.9

b) Der Seilbetrieb.

Wenn es sich um Übertragung größerer Kräfte handelt, so wendet man den Seilbetrieb an, und zwar innerhalb von Gebäuden vorteilhaft den **Hanfseilbetrieb,** auf größere Entfernungen von 50 bis 150 m den **Drahtseilbetrieb.**

α) Der Hanfseilbetrieb.

Die Hanfseiltransmission besteht darin, daß ein Hanfseil ohne Ende über zwei mit keilförmigen Rillen versehene Scheiben läuft und sich dabei in die Rillen einklemmt. Dadurch wird eine große Reibung erzeugt und die Spannung im Seile verringert. Der Keilwinkel der Rillen beträgt gewöhnlich $\delta = 45^0$. — Die Spannungen im ziehenden und gezogenen Teile des Seiles sind so groß wie diejenigen beim Riemenbetrieb, eher etwas kleiner wegen der auftretenden größeren Reibung.

β) Der Drahtseilbetrieb.

Da diese Art der Kraftübertragung auf größere Entfernungen angewendet wird, müssen ziehendes und gezogenes Seil durch Leitrollen unterstützt werden. Die Entfernung der Leitrollen hat 16 bis 20 m zu betragen. Die zulässige Umlaufgeschwindigkeit des Seiles ist mit 20 bis 30 m zu wählen. — Ein Seil besteht aus 6 **Litzen** à 6 bis 7 **Drähten.**

Bei der Montage muß das Seil schon eine gewisse Pfeilhöhe haben, Fig. 160. — Die Spannung T zerlegt sich dabei in die Komponenten H und V.

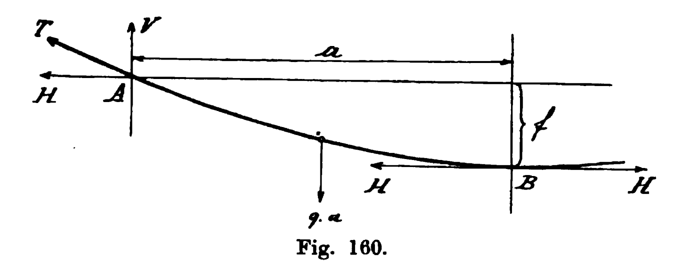


Fig. 160.

Das Gewicht der Längeneinheit der Horizontalprojektion des Seiles soll q kg sein. — Es müßte eigentlich angenommen werden, daß das Gewicht der Längeneinheit des Seiles konstant sei. Wenn dies hier nicht geschieht, so ist es deshalb, damit die Untersuchung sich einfacher gestalte. Man nimmt an

$$q = 0{,}7 \cdot i \cdot \delta^2 \quad \text{. . . . . (159),}$$

wenn i die Zahl der Drähte und δ die Drahtstärke in cm bedeuten.

Das Moment $qa \cdot \frac{a}{2}$ bringt das Durchhängen einer Seilhälfte hervor. — Das Gleichgewicht wird hier hergestellt durch das Moment $H \cdot f$.

Bringt man nämlich in B zwei horizontale, entgegengesetzt gleiche Kräfte H an, so bildet die rechtswirkende mit H in A das Kräftepaar mit dem Momente $H \cdot f$.

Die Gleichgewichtsbedingung lautet demnach

$$qa \cdot \frac{a}{2} = H \cdot f, \text{ daraus ist}$$

$$H = \frac{qa^2}{2f}$$

Betrachtet man f und a als zugehörige Koordinaten, so ist $H = \frac{qa^2}{2f}$ die Gleichung einer Parabel. Würde indes die Voraussetzung gemacht werden, daß das Gewicht der Längeneinheit des Seiles konstant sei, dann würde die Gleichung einer Kettenlinie resultieren.

Es lassen sich nun die Pfeilhöhen im führenden und geführten Seile leicht rechnen.

Im führenden Seile ist . . . . $T = \frac{qa^2}{2f_1}$,

im geführten Seile ist . . . . $t = \frac{qa^2}{2f_2}$,

im ruhenden Seile ist . . . . $S = \frac{q a^2}{2 f}$, so daß sich ergeben

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= \frac{q a^2}{2 T} \\ f_2 &= \frac{q a^2}{2 t} \\ f &= \frac{q a^2}{2 S} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (160)$$

Die Größen von T, t und S sind annähernd so groß wie die entsprechenden beim Riemenbetrieb.

$$\text{Da } \frac{q a^2}{2} = f_1 \cdot T = f_2 \cdot t = f \cdot S \ldots\ldots \quad (161)$$

ist, läßt sich sagen:

„Beim Drahtseilbetrieb ist Spannung mal Pfeilhöhe überall konstant."

Beispiele.

186. Welche Vielfache der Umfangskraft sind die Spannungen im ruhenden, ferner im führenden und geführten Teil eines etwas gefetteten Riemens, wenn derselbe 0,4 des Umfangs der treibenden Scheibe umspannt?

Auflösung: Für obenstehende Angaben ist $e^{f\alpha} = 2{,}02$.

$$S = \frac{P}{2} \cdot \frac{e^{f\alpha} + 1}{e^{f\alpha} - 1} = \frac{P}{2} \cdot \frac{3{,}02}{1{,}02}$$

$$\boldsymbol{S = 1{,}48\, P \sim 1{,}5\, P}$$

$$T = \frac{P \cdot e^{f\alpha}}{e^{f\alpha} - 1} = \frac{P \cdot 2{,}02}{1{,}02}$$

$$\boldsymbol{T \sim 2\, P}$$

$$t = \frac{P}{e^{f\alpha} - 1} = \frac{P}{1{,}02}$$

$$\boldsymbol{t \sim P}$$

187. Wie groß sind die Spannungen im ruhenden, ferner im führenden und geführten Teil eines Hanfseiles, welches über zwei mit Rillen versehenen Scheiben läuft, wenn $f = 0{,}7$ (bei Keilwinkel $\delta = 45^0$) und $\alpha = 0{,}9 \cdot \pi$ sind?

Auflösung: $$S = \frac{P}{2} \cdot \frac{e^{f\alpha} + 1}{e^{f\alpha} - 1} = \frac{P}{2} \cdot \frac{2{,}718^{0{,}7 \cdot 0{,}9 \cdot \pi} + 1}{2{,}718^{0{,}7 \cdot 0{,}9 \cdot \pi} - 1}$$

$$\boldsymbol{S = 0{,}66\, P}$$

$$T = \frac{P \cdot e^{f\alpha}}{e^{f\alpha} - 1} = P \frac{2{,}718^{0{,}7 \cdot 0{,}9 \cdot \pi}}{2{,}718^{0{,}7 \cdot 0{,}9 \cdot \pi} - 1}$$

$$\boldsymbol{T = 1{,}16\, P}$$

$$\boldsymbol{t = 0{,}16\, P}$$

188. Mittels einer Drahtseiltransmission soll auf eine Entfernung von 100 m eine Leistung von 60 PS übertragen werden. Die Antriebsscheibe habe einen Durchmesser von 3,4 m uud mache 100 Touren. Das Drahtseil bestehe aus 42 Drähten, deren jeder einen Durchmesser von 1,4 mm besitzt.

T kann gleich $2P$ und t gleich P angenommen werden. Wie groß sind die Pfeilhöhen im führenden und geführten Teile des Drahtseiles?

Auflösung:

$$P \cdot R = 716200 \frac{N}{n}$$

$$P = \frac{716200 \cdot 60}{100 \cdot 1700}$$

$$P \sim 250 \text{ kg}$$

$$T \sim 500 \text{ kg}$$

$$t \sim 250 \text{ kg}$$

$$q = 0{,}7 \cdot i \cdot \delta^2 = 0{,}7 \cdot 42 \cdot 0{,}14^2$$

$$q \sim 0{,}58 \text{ kg}$$

$$f_1 = \frac{q a^2}{2T} = \frac{0{,}58 \cdot 50^2}{2 \cdot 500} = \frac{0{,}58 \cdot 25}{10}$$

$$f_1 = 1{,}45 \text{ m}$$

$$f_2 = \frac{q a^2}{2t} = \frac{0{,}58 \cdot 50^2}{2 \cdot 250} = \frac{0{,}58 \cdot 25}{5}$$

$$f_2 = 2{,}9 \text{ m}$$

Dritter Abschnitt.

Dynamik.

§ 49. Bewegungsgröße, Antrieb und Energie.

Wirkt auf einen Körper mit der Masse M eine Kraft P ein, so erteilt sie ihm eine Beschleunigung $p = \frac{P}{M}$

Die Geschwindigkeit des Körpers ist nach t Sekunden laut § 2

$$v = p \cdot t = \frac{P}{M} \cdot t$$

Daher ergibt sich die Beziehung

$$\boldsymbol{M \cdot v = P \cdot t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(162)}$$

„Das Produkt aus der Masse eines Körpers und seiner Geschwindigkeit heißt die **Bewegungsgröße des Körpers**, dagegen das Produkt aus bewegender Kraft und der Zeit, welche nötig ist, um den Körper auf die Geschwindigkeit zu bringen, **Antrieb der Kraft.**“

„Die Bewegungsgröße einer mit der Geschwindigkeit v fortschreitenden Masse M ist gleich dem Antriebe jener Kraft P, welche in t Sekunden der Masse M die Geschwindigkeit v zu erteilen vermag.“

In der Zeit t bewegt die Kraft P nun die Masse M einen Weg

$$s = \frac{p}{2} t^2$$

Da $p = \frac{P}{M}$ und t aus $v = p\,t$ sich mit $t = \frac{v}{p} = \frac{v \cdot M}{P}$ ergibt, folgt

$$s = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{M} \cdot \frac{v^2 \cdot M^2}{P^2} \text{ oder}$$

$$\boldsymbol{P \cdot s = \frac{M \cdot v^2}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(163)}$$

Durch die Wirkung der Kraft P auf dem Wege s ist der Masse eine Arbeit $\frac{M v^2}{2}$ mitgeteilt worden, welche sie verrichten kann, wenn sie infolge irgend welcher Widerstände wieder in den Zustand der Ruhe zurückkommt.

„Das Vermögen einer bewegten Masse, eine bestimmte mechanische Arbeit verrichten zu können, heißt **Arbeitsfähigkeit, Arbeitsvermögen, lebendige**

Kraft (schlechte, leider üblich gebliebene Bezeichnung, welche von Poncelet herrührt) oder **Energie.**"

Hat indes die Kraft P die Masse M von der Anfangsgeschwindigkeit c in der Zeit t Sekunden auf die Endgeschwindigkeit v gebracht, dann ist

$$s = c\,t + \frac{p}{2}t^2$$

und $p = \frac{P}{M}$, ferner aus $v = c + p\,t$

$$t = \frac{v - c}{p} = \frac{(v - c)\cdot M}{P}, \text{ demnach}$$

$$s = c\frac{(v - c)\,M}{P} = \frac{1}{2}\cdot\frac{P}{M}\cdot\frac{(v - c)^2\cdot M^2}{P^2}$$

$$P\cdot s = M\cdot c\,(v - c) + \frac{1}{2}M\,(v - c)^2$$

$$P\cdot s = M\cdot\,(v - c)\cdot\left(c + \frac{v}{2} - \frac{c}{2}\right) = M\,(v - c)\frac{v + c}{2}, \text{ d. h.}$$

$$\boldsymbol{P\cdot s = \frac{M}{2}v^2 - \frac{M}{2}c^2} \quad \dots\dots\dots\dots \quad \textbf{(164)}$$

„Die Arbeit, welche eine Kraft leistet, um eine Masse von der Geschwindigkeit c auf die Geschwindigkeit v zu bringen, ist gleich der Differenz der lebendigen Kräfte, welche die Masse zu Ende und zu Anfang der Bewegung besitzt."

Die Arbeit, welche die Kraft geleistet hat, ist somit als Energie in der bewegten Masse zum Vorschein gekommen.

„Man nennt daher dieses Gesetz das **Gesetz von der Erhaltung der Energie.**"

Beispiele.

189. Wie groß ist der Reibungskoeffizient f, wenn ein Körper mit dem Gewichte G kg unter Einwirkung einer Kraft P kg in t Sekunden vom Ruhezustande aus s Meter auf horizontaler Bahn zurücklegt?

Auflösung: Die treibende Kraft ist $(P - f\,G)$; daher gilt

$$M\cdot v = (P - f\,G)\cdot t$$

$$\frac{G}{g}\cdot v = (P - f\,G)\cdot t$$

$$s = \frac{o + v}{2}\cdot t = \frac{v}{2}\cdot t$$

$$v = \frac{2\,s}{t}$$

$$\frac{G}{g}\cdot\frac{2\,s}{t} = (P - f\,G)\cdot t$$

$$\frac{G}{g}\cdot\frac{2\,s}{t^2} = P - f\,G$$

$$\boldsymbol{f = \frac{P}{g} - \frac{2\,s}{g\,t^2}}$$

190. Ein Körper mit dem Gewichte G kg soll durch eine Kraft, die mit dem Horizonte den Winkel β bildet, fortgezogen werden. Wie groß ist dieselbe, wenn der Reibungskoeffizient f ist?

Auflösung: Der Normaldruck des Körpers auf die Unterlage wird durch die Vertikalkomponente von P, nämlich durch $P \cdot \sin\beta$, verringert. Es ist dann

$$N = G - P \cdot \sin\beta$$

$$W = f\,G - f\,P \sin\beta$$

$$P \cdot \cos\beta = f\,G - f\,P \sin\beta$$

$$P \cdot \frac{\cos\beta \cos\varphi + \sin\beta \sin\varphi}{\cos\varphi} = G \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

$$\boldsymbol{P = G \frac{\sin\varphi}{\cos(\beta - \varphi)}}$$

191. Welche Verzögerung erfährt ein gleitender Körper mit dem Gewichte G auf horizontaler Bahn?

Auflösung: Die verzögernde Kraft fG ist gleich der Masse des Körpers $\frac{G}{g}$ mal dessen Verzögerung b.

$$fG = b \cdot \frac{G}{g}$$

Die Verzögerung b wird daher

$$\boldsymbol{b = fg}$$

192. Ein Eisenbahnzug mit 200 000 kg Gewicht soll beim Anfahren in einer Minute die Geschwindigkeit 15 m/sek erreichen. Wie groß muß die Zugkraft der Lokomotive sein, wenn $f = 0{,}005$ gesetzt werden darf?

Auflösung:
$$(P - fG) \cdot t = \frac{G}{g} \cdot v$$

$$P = fG + \frac{G \cdot v}{g \cdot t}$$

$$P = 0{,}005 \cdot 200\,000 + \frac{200\,000 \cdot 15}{9{,}81 \cdot 60}$$

$$P = 1000 + 5100$$

$$\boldsymbol{P = 6100 \text{ kg}}$$

193. Wie lange dauert es, bis ein auf horizontaler Strecke sich selbst überlassener Eisenbahnwagen zur Ruhe kommt, wenn seine Anfangsgeschwindigkeit $c = 5$ m beträgt? $f = 0{,}005$. — Welche Strecke durchläuft er noch?

Auflösung: Die verzögernde Kraft ist fG. — Es ist dann

$$fG \cdot t = M \cdot c$$

$$t = \frac{M \cdot c}{f \cdot G} = \frac{G \cdot c}{f \cdot g \cdot G} = \frac{c}{fg}$$

$$t = \frac{5}{0{,}005 \cdot 9{,}81} = \frac{1000}{9{,}81} = 102 \text{ Sek.}$$

$$\boldsymbol{t = 1 \text{ Min. } 42 \text{ Sek.}}$$

$$s = \frac{v + c}{2} \cdot t = \frac{0 + 5}{2} \cdot 102$$

$$\boldsymbol{s = 255 \text{ m}}$$

Mittels der Arbeitsgleichung läßt sich die Aufgabe ebenfalls recht einfach lösen. Die lebendige Kraft des Wagens wird durch die Reibung aufgezehrt.

$$\frac{M \cdot c^2}{2} = f G \cdot s$$

$$\frac{G \cdot c^2}{2g} = f G \cdot s$$

$$s = \frac{c^2}{2fg}$$

$$s = \frac{5^2}{2 \cdot 0{,}005 \cdot 9{,}81}$$

$$\boldsymbol{s = 255 \text{ m}}$$

$$s = \frac{v + c}{2} \cdot t = \frac{c}{2} \cdot t$$

$$t = \frac{2s}{c} = \frac{2c^2}{c \cdot 2fg}$$

$$t = \frac{c}{fg}$$

$$\boldsymbol{t = 1 \text{ Min. } 42 \text{ Sek.}}$$

194. Ein Regulierungsschieber, welcher unter einem Drucke von 3 Atm. steht, ist 75 mm breit und 450 mm lang. Wie groß ist der Widerstand gegen dessen Verschieben, wenn $f = 0{,}25$ ist?

Auflösung: Die gedrückte Fläche ist

$$7{,}5 \cdot 45 \sim 338 \text{ qcm}$$

Der Druck auf die Schieberfläche beträgt

$$P = 338 \cdot 3 \sim 1014 \text{ kg}$$

Somit ist der Widerstand gegen Verschieben des Schiebers

$$W = f \cdot P = 0{,}25 \cdot 1014$$

$$\boldsymbol{W \sim 255 \text{ kg}}$$

§ 50. Die fortschreitende Bewegung auf der schiefen Ebene ohne Rücksicht auf Reibung.

Ein Körper mit dem Gewichte G kg ist auf der schiefen Ebene in Bewegung. Fig. 161.

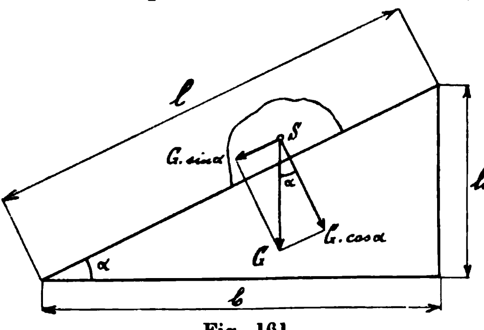


Fig. 161.

Die Komponente $G \sin \alpha$ erteilt dem Körper eine gleichförmig beschleunigte Bewegung. Die Beschleunigung findet sich laut Beschleunigungsgesetz mit

$$p = \frac{P}{m} = \frac{G \cdot \sin \alpha}{\frac{G}{g}} = g \cdot \sin \alpha$$

$$\boldsymbol{p = g \cdot \sin \alpha} \quad . \quad . \quad (165)$$

Wäre z. B. $\alpha = 30^0$, so würde $p = 0{,}5$ g folgen.

Es werde nun gefragt, mit welcher Geschwindigkeit v der Körper unten von der schiefen Ebene anlangt. Angenommen, die Zeit für das Durchlaufen des Weges $l =$ Länge der schiefen Ebene sei t, dann wird, da die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers oben auf der schiefen Ebene gleich Null ist,

$$v = p \cdot t = g \sin \alpha \cdot t = g \cdot \frac{h}{l} \cdot t$$

Nun ist

$$l = \frac{1}{2} p t^2 = \frac{1}{2} \cdot g \frac{h}{l} \cdot t^2$$

$$t = l \sqrt{\frac{2}{gh}}$$

$$v = g \frac{h}{l} \cdot l \sqrt{\frac{2}{gh}} \text{ oder}$$

$$v = \sqrt{2gh} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (166)$$

„Die Endgeschwindigkeit, welche ein Körper beim Herabgleiten von einer schiefen Ebene erlangt, ist so groß als die Geschwindigkeit, die er besitzt, wenn er die Höhe der schiefen Ebene frei herabgefallen wäre.“

„Ob die schiefe Ebene hierbei nach einer Geraden oder Kurve gebildet ist, ist gleichgiltig.“

Fig. 162.

Beweis: In A, Fig. 162, lange der Körper mit der Geschwindigkeit $\overline{AC} = v_1$ an. Nun sind

$$\overline{AD} = \overline{AC} \cdot \sin \beta = v_1 \cdot \sin \beta$$

$$\overline{AB} = v_1 \cos \beta$$

Der Geschwindigkeitsverlust in A ist daher

$$v_1 - v_1 \cos \beta = v_1 (1 - \cos \beta)$$

Derselbe ist ein Minimum, wenn $\cos \beta$ ein solches wird. Das ist für $\beta = 0$ der Fall.

Ist die schiefe Ebene aus lauter unendlich kleinen, schiefen Ebenen zusammengesetzt, d. h. nach einer stetig gekrümmten Kurve gebildet, dann trifft dies zu. Der Gesamtverlust an Geschwindigkeit ist 0, daher wie früher

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Die Dauer der Bewegung rechnet sich aus $l = \frac{p}{2} t^2$ mit, Fig. 163,

$$t = \sqrt{\frac{2l}{p}} = \sqrt{\frac{2l \cdot CD}{g \cdot AC}} = \sqrt{\frac{2l \cdot CD}{gl}} = \sqrt{\frac{2 \cdot CD}{g}}$$

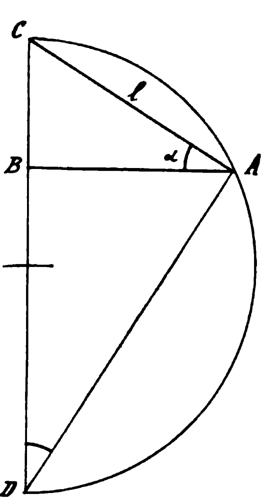


Fig. 163.

Daher ergibt sich $\overline{CD} = \frac{g}{2} t^2$ . . . . (167)

„Die Zeit, welche der Körper zum Herabfallen von der schiefen Ebene braucht, ist gerade so groß als würde er den Durchmesser eines Kreises frei herunterfallen, von dem die schiefe Ebene eine Sehne ist."

„Die Höhe der schiefen Ebene und der Durchmesser des Kreises, von dem die schiefe Ebene eine Sehne ist, sind **isochrone** Wege (Wege in gleichen Zeiten)."

Beispiele.

195. Welche Neigung gegen den Horizont hat eine 12 m lange, schiefe Ebene, wenn von ihr ein Körper in 2 Sekunden heruntergleitet?

Auflösung:

$$12 = \frac{p}{2} t^2$$

$$12 = \frac{p}{2} \cdot 4$$

$$p = 6 = g \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{6}{9{,}81} = 0{,}61$$

$$\alpha = 37{,}5^0$$

196. Welche Neigung gegen den Horizont muß eine schiefe Ebene mit der Basis b haben, damit ein Körper von ihr in kürzester Zeit heruntergleite?

Auflösung: Die Länge der schiefen Ebene ist $\frac{b}{\cos \alpha}$. — Es gilt nun die Weggleichung

$$\frac{b}{\cos \alpha} = \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2b}{g} \cdot \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}}$$

$$t = \sqrt{\frac{4b}{g}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\sin 2\alpha}}$$

$$t = \sqrt{\frac{4b}{g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin 2\alpha}}$$

t wird ein Minimum, wenn der veränderlich große Nenner $\sqrt{\sin 2\alpha}$ ein Maximum wird.

Dies trifft zu für $\sin 2\alpha = 1$ oder $2\alpha = 90^0$.

Die gefragte Lösung lautet daher

$$\alpha = 45^0$$

§ 51. Die fortschreitende Bewegung auf der schiefen Ebene mit Rücksicht auf Reibung.

Beispiele.

197. Wie groß ist die Beschleunigung eines von einer gegen den Horizont unter Winkel α geneigten Ebene heruntergleitenden Körpers, wenn der Reibungskoeffizient f ist?

Auflösung: Die Beschleunigung ist der Quotient aus bewegender Kraft und bewegter Masse.

$$p = \frac{G \cdot \sin\alpha - f\,G\cos\alpha}{\frac{G}{g}}$$

$$p = g\,(\sin\alpha - f\cos\alpha)$$

$$p = g\left(\sin\alpha - \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos\alpha\right)$$

$$p = g \cdot \frac{\sin\alpha\cos\varphi - \sin\varphi\cos\alpha}{\cos\varphi}$$

$$\boldsymbol{p = g \cdot \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos\varphi}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (168)$$

Wäre keine Reibung vorhanden, so wäre $f = 0$ und $\varphi = 0$. — Dann wird $p = g\sin\alpha$, welche Gleichung mit Gleichung (165) übereinstimmt.

198. Mit welcher Endgeschwindigkeit langt ein eine unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigte Ebene mit der Höhe h heruntergleitender Körper am Fuße derselben an, wenn der Reibungskoeffizient f ist?

$$v = g \cdot \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos\varphi} \cdot t$$

$$\frac{h}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}\,g\,\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos\varphi} \cdot t^2$$

$$v = g\,\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos\varphi} \cdot \sqrt{\frac{2\,h}{g\sin\alpha} \cdot \frac{\cos\varphi}{\sin(\alpha - \varphi)}}$$

$$\boldsymbol{v = \sqrt{2\,g\,h \cdot \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin\alpha\cos\varphi}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (169)$$

Wäre $\varphi = 0$, dann folgt $v = \sqrt{2\,g\,h}$, s. (166).

§ 52. Bewegung eines mathematischen Pendels.

Ein Pendel heißt im allgemeinen jeder um eine horizontale Achse schwingender Körper. Unter einem **mathematischen Pendel** versteht man einen an einem gewichtslos gedachten Faden aufgehängten, schwingenden, materiellen Punkt, Fig. 164.

Schwingung heißt die Bewegung des materiellen Punktes von der äußersten Lage rechts über die Mittellage bis zur äußersten Lage links. Die

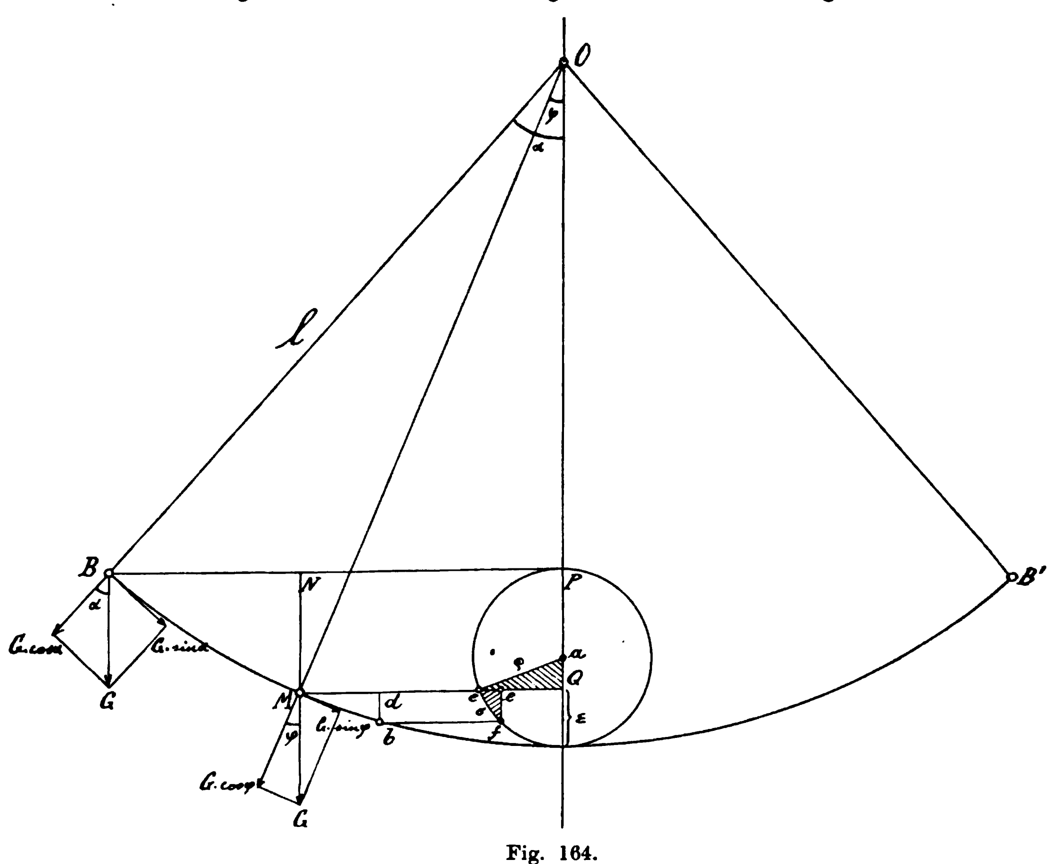


Fig. 164.

Zeit für eine Schwingung wird **Schwingungsdauer** genannt. Der jeweilige Ausschlagswinkel des Pendels aus der Mittellage wird mit **Elongation**, der größte Ausschlagswinkel mit **Amplitude** bezeichnet. Die Zahl der Schwingungen pro Zeiteinheit heißt **Schwingungszahl**.

1 Schwingung dauert t Sek.
x Schwingungen dauern 1 „ .

Daher $x : 1 = 1 : t$ oder

$$x = \frac{1}{t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (170)$$

„Schwingungszahl und Schwingungszeit sind reziproke Werte.“

Die **Schwingungsintensität**, das Maß der Schwingung, ist abhängig von der Größe der jeweiligen Schwingungsgeschwindigkeit. Infolge der Schwere wirken in

B		M	
$G \cos \alpha$	$G \sin \alpha$	$G \cos \varphi$	$G \sin \varphi$
spannend	bewegend	spannend	bewegend

Die Beschleunigung in B ist $\frac{G}{g} \sin \alpha$, in M $\frac{G}{g} \sin \varphi$; da nun $\varphi < \alpha$ ist,

wird
$$\frac{G}{g} \sin \varphi < \frac{G}{g} \sin \alpha \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (171)$$

„Die Beschleunigung ist ein Maximum in den Amplituden, ein Minimum (0) in der Mittellage." Die Geschwindigkeit, welche das Bewegliche in M erlangt, ist so groß, als wäre es die Höhe $\overline{NM}$ frei herabgefallen.

$$v = \sqrt{2g \cdot \overline{NM}}; \; \overline{NM} = \overline{OQ} - \overline{OP} = l(\cos \varphi - \cos \alpha), \text{ d. h.}$$

$$v = \sqrt{2\,gl\,(\cos \varphi - \cos \alpha)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (172)$$

Für B ist $\varphi = 0$, folgt $v = 0$

„ A „ $\varphi = 0$, „ $v = \sqrt{2\,gl\,(\cos \varphi - \cos \alpha)}$

„ B' „ $\varphi = -\alpha$, „ $v = 0$

„In B und B' sind die minimalen, in A ist die maximale Geschwindigkeit vorhanden."

Vom Luftwiderstande ist in obigen Betrachtungen abgesehen worden. Unter Nichtberücksichtigung desselben werde im folgenden die Formel für die Schwingungsdauer abgeleitet.

In M ist
$$v = \sqrt{2\,g \cdot \overline{PQ}}$$

Die Zeit für den unendlich kleinen Weg $\overline{Mb}$ ist

$$\tau = \frac{\overline{Mb}}{\sqrt{2\,g \cdot \overline{PQ}}}$$

Da $\triangle\, Mbd \sim \triangle\, MOQ$, wird

$$\overline{Mb} : \overline{bd} = l : \overline{MQ} \text{ oder}$$

$$\overline{Mb} : \overline{bd} = l : \sqrt{\varepsilon(2l - \varepsilon)}$$

ε^2 kann wegen seiner Kleinheit gegen $2l\varepsilon$ vernachlässigt werden. Dann

ergibt sich
$$\tau = \sqrt{\frac{\overline{Mb}}{2\,g \cdot \overline{PQ}}} = \frac{\overline{bd} \cdot l}{\sqrt{2l\varepsilon}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\,g \cdot \overline{PQ}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{\overline{bd}}{\sqrt{\varepsilon \cdot \overline{PQ}}}$$

Nun ist $\overline{cQ} = \sqrt{\overline{PQ} \cdot \varepsilon}$, daher $\tau = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{\overline{bd}}{\overline{cQ}}$;

ferner ist
$$\triangle\, cef \sim \triangle\, cQa, \text{ so daß}$$

$$\overline{fe} : \overline{cQ} = \sigma : \varrho$$

$$\overline{fe} = \overline{bd}$$

$$\frac{\overline{bd}}{\overline{cQ}} = \frac{\sigma}{\varrho}, \text{ also}$$

$$\tau = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{\sigma}{\varrho}$$

Die Summe aller unendlich kleinen Zeitteilchen τ ergibt die ganze Schwingungszeit

$$t = \Sigma(\tau) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \Sigma\left(\frac{\sigma}{\varrho}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot \Sigma(\sigma)_B^{B'} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot 2\varrho\pi$$

Die Dauer der Schwingung von B bis B' ist daher

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (173)$$

Aus letzter Formel lassen sich einige wertvolle Schlüsse ziehen.

a) Die Größe α kommt in der Gleichung für t nicht vor. „Die Schwingungsdauer ist unabhängig vom Elongationswinkel (allerdings solange derselbe sehr klein ist)". Pendel gleicher Länge sind **isochron**. —

b) Zwei Pendel mit den Längen l_1 und l_2 haben an demselben Ort der Erde die Schwingungszeiten

$$t_1 = \pi\sqrt{\frac{l_1}{g}} \text{ und } t_2 = \pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}$$

Demnach folgt

$$\left.\begin{aligned} t_1^2 : t_2^2 &= l_1 : l_2 \\ \text{und } n_1^2 : n_2^2 &= l_2 : l_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (174)$$

d. h. „Die Längen verhalten sich wie die Quadrate der Schwingungszeiten oder verkehrt wie die Quadrate der Schwingungszahlen."

c) Für Pendel an verschiedenen Orten der Erde müssen die Längen ungleich ausfallen, wenn die Schwingungszeiten gleich werden sollen. In der nördl. Breite 45° wird $l = \frac{g}{\pi^2} \sim 1$ m (0,99355), wenn das Pendel eine Schwingung in der Sekunde machen soll.

Beispiele.

199. Wie groß ist die Fallbeschleunigung an einem Orte der Erde, an dem ein 1 m langes Pendel genau 1 Schwingung in der Sekunde macht?

Auflösung: $g = \pi^2 = 9{,}8696$ m

200. Welches Verhältnis besteht zwischen der Schwingungszeit eines l Meter langen Pendels und der Fallzeit für die Höhe l?

Auflösung:

$$t_1 = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2l}{g}}$$

$$t_1 : t_2 = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} : \sqrt{\frac{2l}{g}}$$

$$t_1 : t_2 = \pi : \sqrt{2}$$

§ 53. Bewegungsgesetze rotierender Körper.

„Unter **Winkelgeschwindigkeit** ω eines um eine feste Achse sich gleichförmig drehenden Körpers versteht man den Winkel, welchen jedes Teilchen dieses Körpers pro Zeiteinheit zurücklegt.“ Siehe § 6.

Statt im Winkelmaß kann ω auch im Bogenmaß (als Bogen mit dem Radius 1) ausgedrückt werden. Dann wird die Geschwindigkeit am Radius r, die **Bahngeschwindigkeit**, $v = r\omega$.

„Unter dem **Trägheitsmoment** eines starren Körpers in bezug auf eine bestimmte Drehachse versteht man die Summe der Produkte aus den Massenteilchen des Körpers und den Quadraten ihrer Abstände von derselben.“

Bei einer **gleichförmig drehenden Bewegung** eines starren Körpers existiert zwischen Energie und Trägheitsmoment desselben eine bestimmte Beziehung.

Die Massenteilchen $m_1, m_2, m_3 \ldots.$ haben die Bahngeschwindigkeiten

$$\begin{aligned} v_1 &= r_1 \omega \\ v_2 &= r_2 \omega \\ &\vdots \end{aligned}$$

Die lebendigen Kräfte der Massenteilchen sind dann

$$\begin{aligned} \frac{m_1 v_1^2}{2} &= \frac{m_1}{2} r_1^2 \omega^2 \\ \frac{m_2 v_2^2}{2} &= \frac{m_2}{2} \cdot r_2^2 \omega^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Demnach wird die totale lebendige Kraft des rotierenden Körpers

$$L = \Sigma\left(\frac{m}{2} r^2 \omega^2\right) = \frac{\omega^2}{2} \cdot \Sigma(m r^2)$$

$\Sigma(m r^2)$ ist das Trägheitsmoment des Körpers, so daß der Ausdruck für seine Energie lautet

$$L = \frac{\omega^2}{2} \cdot J \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (175)$$

Bei der **ungleichförmig drehenden Bewegung** ändert sich die Winkelgeschwindigkeit jeden Augenblick. Ein Teilchen m_1 eines sich ungleichförmig drehenden Körpers hatte anfangs die Bahngeschwindigkeit v_1 und nach der Zeit τ die Bahngeschwindigkeit v_1'. — Dann gilt

$$\begin{aligned} v_1 &= r_1 \omega_1 \\ v_1' &= r_1 \omega_1' \end{aligned}$$

Die Bahngeschwindigkeitsänderung ist dann

$$v_1 - v_1' = r_1 (\omega_1 - \omega_1'),$$

daher die **Bahnbeschleunigung**

$$p = \frac{v_1 - v_1'}{\tau} = r_1 \frac{\omega_1 - \omega_1'}{\tau}.$$

„Das Verhältnis aus der Winkelgeschwindigkeitsänderung $(\omega_1 - \omega_1')$ und der Zeit τ, in welcher diese erfolgt, heißt **Winkelbeschleunigung** ε.“

Daher wird

$$p = r \cdot \varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (176)$$

Zwischen dem die **gleichförmig beschleunigte Drehung** veranlassenden Drehmomente und dem Trägheitsmomente des rotierenden Körpers läßt sich eine wertvolle Beziehung ableiten. Es sind nämlich die Bahnbeschleunigungen der Teilchen des Körpers

$$p_1 = r_1 \varepsilon$$
$$p_2 = r_2 \varepsilon$$
$$\vdots \quad \vdots$$

Die auf die Teilchen wirkenden Drehkräfte

$$m_1 p_1 = m_1 r_1 \varepsilon$$
$$m_2 p_2 = m_2 r_2 \varepsilon$$
$$\vdots \quad \vdots$$

endlich die auf die Teilchen wirkenden Drehmomente

$$D_1 = m_1 p_1 r_1 = m_1 r_1^2 \varepsilon$$
$$D_2 = m_2 p_2 r_2 = m_2 r_2^2 \varepsilon.$$

Daher wird das Gesamtdrehmoment

$$D = \Sigma (mr^2 \cdot \varepsilon) = \varepsilon \cdot \Sigma (mr^2) \text{ oder}$$

$$\boldsymbol{D = \varepsilon \cdot J} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(177)}$$

Aus Formel (175) ist erklärlich, warum große Massen, z. B. Schwungradkränze, infolge ihrer großen Trägheitsmomente große Energien übertragen können, Formel (177) zeigt, daß ein großes Drehmoment an einem Körper eine große Winkelbeschleunigung hervorruft.

„Unter dem Zentrifugalmoment eines geometrischen Gebildes in bezug auf zwei zueinander beliebig geneigte Achsen versteht man die Summe der Produkte aus den Größen der Teilchen des Gebildes und der Koordinaten derselben.“

$$\boldsymbol{L = \Sigma (f \cdot x \cdot y)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(178)}$$

„Ist das Gebilde ein symmetrisches, so ist dessen Zentrifugalmoment in bezug auf seine Hauptachsen gleich Null.“

— — — — —

§ 54. Reduktion von Trägheitsmomenten.

Ist z. B. das Trägheitsmoment eines Körpers in bezug auf irgend eine Achse bekannt, dann läßt sich leicht dasjenige in bezug auf eine andere, zu ersterer bestimmt liegende finden.

„Die Aufsuchung des Trägheitsmomentes in bezug auf eine bestimmte Achse aus einem in bezug auf eine andere Achse gegebenen Trägheitsmomente nennt man **Reduktion** des letzteren.“

Es sei, Fig. 165, $\overline{MN}$ eine durch den Schwerpunkt des Körpers gehende, $\overline{mn}$ eine zu dieser im Abstande a parallele Achse.

Das Trägheitsmoment eines Massenteilchens A des Körpers in bezug auf die Achse $\overline{MN}$ ist

$$\triangle J_s = m \cdot \varrho^2,$$

in bezug auf die Achse $\overline{mn}$ dagegen

$$\triangle J_o = mr^2$$

Zieht man $\overline{AC}$ senkrecht zur Ebene E, welche durch die Achse $\overline{MN}$ gelegt ist, dann wird

$$r^2 = a^2 + \varrho^2 - 2a\varrho\cos\alpha$$

Nun ist $\varrho\cos\alpha = h$, daher

$$r^2 = a^2 + \varrho^2 - 2ah$$

Beide Seiten der Gleichung mit m multipliziert, folgt

$$mr^2 = ma^2 + m\varrho^2 - 2ahm$$

Demnach gilt für den ganzen Körper

$$\Sigma(mr^2) = \Sigma(ma^2) + \Sigma(m\varrho^2) - \Sigma(2ahm) \text{ oder}$$

$$J_0 = Ma^2 + J_s - 2a\cdot\Sigma(hm)$$

Der Ausdruck $\Sigma(hm)$ ist das statische Moment des Körpers in bezug auf eine Schwerachse und daher gleich Null. Es ist also

$$\boldsymbol{J_0 = J_s + M\cdot a^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(179)}$$

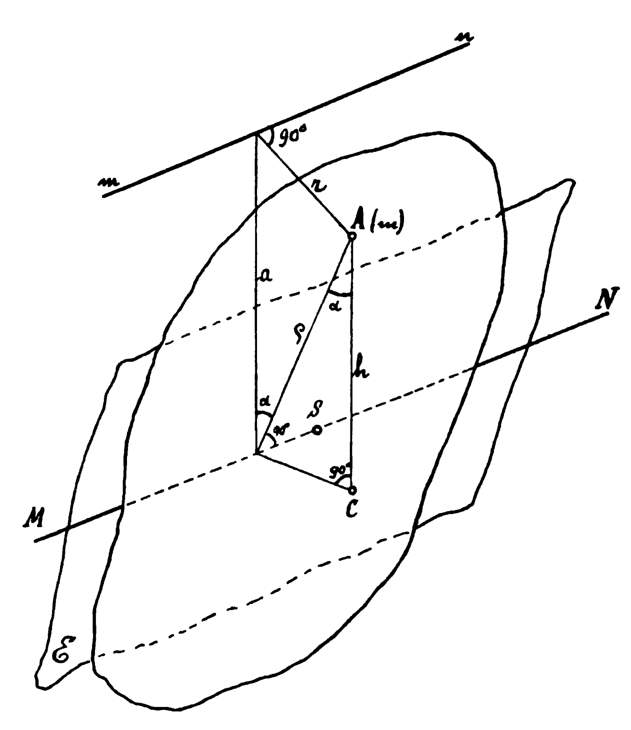


Fig. 165.

J_s ist immer kleiner als J_0, weil Ma^2 positiv ist. „Das Trägheitsmoment eines Körpers in bezug auf eine Schwerachse ist somit das kleinstmögliche.“

Meist werden für Flächen die Trägheitsmomente in bezug auf deren Symmetrieachse gesucht. Oft aber braucht man das Trägheitsmoment einer symmetrischen Fläche in bezug auf eine beliebige Schwerachse. In Fig. 166 ist das Trägheitsmoment in bezug auf die Achse A

$$J_A = m_1 z_1^2 + m_2 z_2^2 + \ldots\ldots$$

Nun ist
$$z_1 = \overline{m_1 b} - \overline{ab} = y_1 \cos\alpha - x_1 \sin\alpha$$
$$z_1^2 = y_1^2 \cos^2\alpha - 2\,x_1 y_1 \sin\alpha\cos\alpha + x_1^2 \sin^2\alpha \quad \text{oder}$$
$$z_1^2 = y_1^2 \cos^2\alpha + x_1^2 \sin^2\alpha - x_1 y_1 \sin 2\alpha; \quad \text{daher}$$
$$J_A = m_1\,(y_1^2 \cos^2\alpha + x_1^2 \sin^2\alpha - \sin 2\alpha \cdot x_1 y_1) +$$
$$+ m_2\,(y_2^2 \cos^2\alpha + x_2^2 \sin^2\alpha - \sin 2\alpha \cdot x_2 y_2) + \ldots$$
$$J_A = \sin^2\alpha \cdot \Sigma(m x^2) + \cos^2\alpha \cdot \Sigma(m y^2) - \sin 2\alpha \cdot \Sigma(m x y).$$

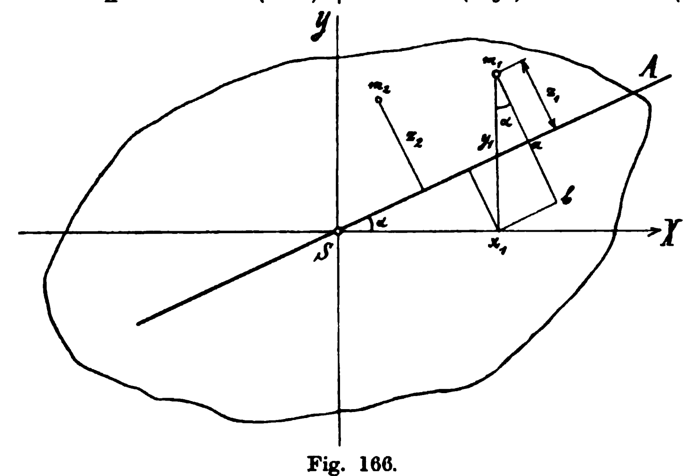


Fig. 166.

$\Sigma(mxy) = L$ ist das **Zentrifugalmoment** in bezug auf die Koordinatenachsen X und Y; da diese letzteren hier Schwerachsen sind, ist $L = 0$. Daher schreibt sich
$$J_A = J_x \cos^2\alpha + J_y \sin^2\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (180)$$

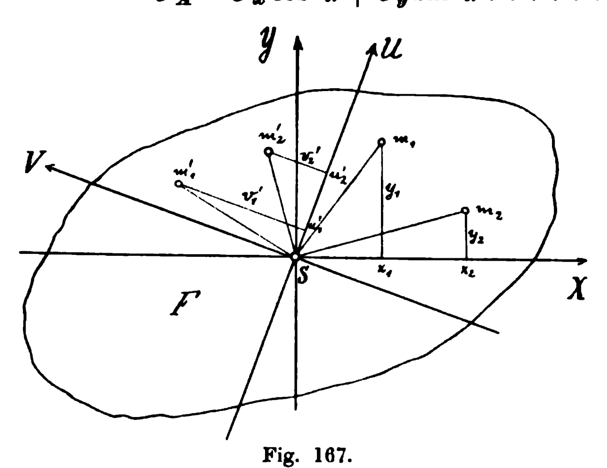


Fig. 167.

„Alle bisher genannten Trägheitsmomente von Flächen heißen **äquatoriale.** Die Achsen, in bezug auf welche die Trägheitsmomente genommen sind, liegen in den Flächen.“

„**Polares Trägheitsmoment** eines Querschnittes indes ist dasjenige, welches in bezug auf eine zu diesem senkrecht stehende Achse genommen wird. Der Schnittpunkt der Achse mit der Fläche heißt **Pol.**“

Es soll nun das polare Trägheitsmoment der Fläche F, Fig. 167, in bezug auf den Pol S (Schwerpunkt) gefunden und durch die beiden äquatorialen Trägheitsmomente J_x und J_y ausgedrückt werden. Nun sind:

$$J_x = m_1 y_1^2 + m_2 y_2^2 + \ldots\ldots\ldots$$
$$J_y = m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + \ldots\ldots\ldots$$
$$J_p = m_1 (x_1^2 + y_1^2) + m_2 (x_2^2 + y_2^2) + \ldots \quad \text{oder}$$
$$J_p = m_1 (u_1^2 + v_1^2) + m_2 (u_2^2 + v_2^2) + \ldots$$

Somit ist einerseits $J_p = \Sigma (m x^2) + \Sigma (m y^2)$ und
andererseits $J_p = \Sigma (m u^2) + \Sigma (m v^2)$, also

$$J_p = J_x + J_y = J_u + J_v \quad \ldots\ldots \quad (181)$$

„Das polare Trägheitsmoment eines Querschnittes ist gleich der Summe zweier äquatorialer, welche in bezug auf durch den Pol gehende, beliebige, aber senkrecht aufeinander stehende Achsen genommen sind.“

„Ist der Querschnitt regulär, so ist das polare Trägheitsmoment doppelt so groß wie das äquatoriale.“

„Schließlich sei noch angeführt, daß ein Trägheitsmoment von der Form mr^2 (Masse mal Quadrat ihres Abstandes von der Achse) **mechanisches Trägheitsmoment**, ein solches von der Form $f \cdot r^2$ (Querschnitt mal Quadrat seines Abstandes von der Achse) **geometrisches Trägheitsmoment** heißt.“

„Aus dem mechanischen Trägheitsmoment wird also das geometrische erhalten, wenn man in demselben statt der Masse die Fläche einführt. Selbstverständlich kann nur von geometrischen Trägheitsmomenten von Querschnitten gesprochen werden.“

§ 55. Trägheitsmomente von materiellen Linien.

201. Das Trägheitsmoment einer Geraden in bezug auf eine in ihrem Endpunkte zu ihr senkrechte Achse. Fig. 168.

Auflösung: Die Gerade $\overline{OA}$ sei gleichmäßig mit Masse belegt gedacht und zwar pro Längeneinheit mit der Masse δ. Dann ist die Masse des

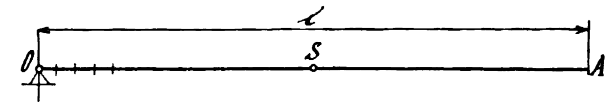


Fig. 168.

n-ten Teils der Geraden $\frac{l}{n} \cdot \delta$. Die Abstände der einzelnen, aufeinander folgenden Teilchen von der Achse O sind ($n = \infty$)

$$\frac{l}{n},\ 2\frac{l}{n},\ 3\frac{l}{n},\ \ldots\ldots\ldots\ n \cdot \frac{l}{n}$$

Demnach wird das Trägheitsmoment der Geraden in bezug auf die Achse O

$$J_O = \frac{l}{n} \cdot \delta \left(\frac{l}{n}\right)^2 + \frac{l}{n} \cdot \delta \cdot \left(2\frac{l}{n}\right)^2 + \ldots\ldots + \frac{l}{n} \cdot \delta \cdot \left(n\frac{l}{n}\right)^2$$

$$J_O = \frac{l}{n} \cdot \delta \cdot \left(\frac{l}{n}\right)^2 \cdot (1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + n^2)$$

In Aufgabe 112 wurde $(1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + n^2)_{n=\infty} = \frac{n^3}{3}$ gefunden. Daher wird

$$J_O = \frac{l}{n} \cdot \delta \cdot \left(\frac{l}{n}\right)^2 \cdot \frac{n^3}{3} \quad \text{oder}$$

$$J_O = \frac{1}{3} (l \cdot \delta) \cdot l^2$$

Da $l \cdot \delta = m$, die Masse der Geraden ist, folgt

$$J_O = \frac{1}{3} m l^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (182)$$

„Das Trägheitsmoment einer Geraden in bezug auf eine in ihrem Endpunkte auf ihr senkrechte Achse ist ebenso groß, als wenn der dritte Teil ihrer Masse am freien Ende konzentriert wäre.“

202. Das Trägheitsmoment einer Geraden in bezug auf eine in ihrem Mittelpunkte auf ihr senkrechte Achse.

Auflösung: Dasselbe heißt J_s — Laut Reduktionsformel (179) wird

$$J_s = J_o - \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3} - \frac{ml^2}{4}$$

$$J_s = \frac{ml^2}{12} = \frac{1}{4} J_O \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (183)$$

„Das Trägheitsmoment ist $^1/_4$ des vorigen.“

203. Wie lautet die Formel für das Trägheitsmoment eines Kreisbogens in bezug auf die in seinem Mittelpunkte auf seine Mittellinie senkrecht stehende Achse? Fig. 169.

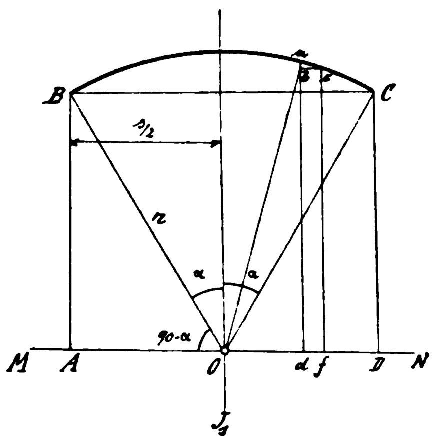


Fig. 169.

Auflösung: Der Kreisbogen BC habe den Radius r. — Winkel BOC sei gleich 2α. — Ein unendlich kleiner Teil von BC, nämlich $\overline{ac}$, hat das Trägheitsmoment

$$\delta \cdot ac \cdot ad^2,$$

wenn δ die Masse pro Längeneinheit des Bogens bedeutet. Das Trägheitsmoment des ganzen Bogens wird dann

$$J = \Sigma(\delta \cdot \overline{ac} \cdot \overline{ad}^2)$$

Da $\triangle abc \sim \triangle Oad$, folgt

$$\overline{ac} : \overline{bc} = \overline{Oa} : \overline{ad}$$

$$\overline{ac} = \frac{\overline{bc} \cdot \overline{Oa}}{\overline{ad}} = \frac{\overline{bc} \cdot r}{\overline{ad}}$$

Demnach wird $J = \Sigma\left(\delta \cdot \frac{\overline{bc} \cdot r}{\overline{ad}} \cdot \overline{ad}^2\right) = r \cdot \delta \cdot \Sigma(\overline{ad} \cdot \overline{bc})$

Nun stellt $\overline{ad} \cdot \overline{bc}$ die Fläche $acdf$ vor, da man letztere ihrer Kleinheit wegen als ein Rechteck betrachten kann. $\Sigma(\overline{ad} \cdot \overline{bc})$ ist dann gleich Fläche $ABCD$.

$$\Sigma(\overline{ad} \cdot \overline{bc}) = \frac{\widehat{BC} \cdot r}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{2} \cdot r \cdot \sin(90 - \alpha)$$

$$= \frac{2r \cdot \widehat{\alpha} \cdot r}{2} + \frac{1}{2} rs \cdot \cos\alpha$$

$$= r^2 \cdot \widehat{\alpha} + \frac{1}{2} r \cos\alpha \cdot 2r \cdot \sin\alpha$$

$$= r^2 \cdot \widehat{\alpha} \cdot \left(1 + \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\widehat{\alpha}}\right)$$

$$J = r\delta \cdot r^2 \cdot \widehat{\alpha} \cdot \left(1 + \frac{\sin\alpha \cos\alpha}{\widehat{\alpha}}\right)$$

$$J = r\widehat{\alpha} \cdot \delta \cdot r^2 \left(1 + \frac{\sin\alpha \cos\alpha}{\widehat{\alpha}}\right)$$

$$M = 2r\widehat{\alpha} \cdot \delta$$

$$r \cdot \widehat{\alpha} \cdot \delta = \frac{M}{2}, \text{ somit}$$

$$J = \frac{Mr^2}{2}\left(1 + \frac{\sin\alpha \cos\alpha}{\widehat{\alpha}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (184)$$

204. Das Trägheitsmoment eines Kreisbogens in bezug auf seine Symmetrieachse. Fig. 169.

Auflösung: Das polare Trägheitsmoment des Kreisbogens ist $J_p = Mr^2$, daher wird

$$J_1 = Mr^2 - \frac{Mr^2}{2}\left(1 + \frac{\sin\alpha \cos\alpha}{\widehat{\alpha}}\right)$$

$$J_1 = \frac{Mr^2}{2}\left(1 - \frac{\sin\alpha \cos\alpha}{\widehat{\alpha}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (185)$$

§ 56. Trägheitsmomente von ebenen Flächen.

205. Das Trägheitsmoment eines Rechteckes in bezug auf die Grundlinie als Achse. Fig. 170.

Auflösung: Man denke sich das Rechteck in unendlich viele Streifen, welche senkrecht zur Grundlinie stehen, zerlegt. Ein solcher kann dann als materielle Linie aufgefaßt werden. Ist die Masse desselben m, so hat letztere in bezug auf die Grundlinie des Rechteckes das Trägheitsmoment $\frac{mh^2}{3}$ — Demnach ist dasjenige des ganzen Rechteckes

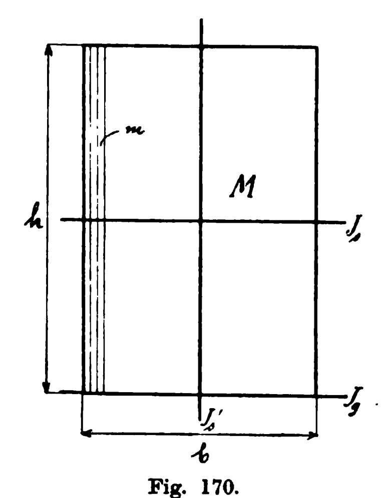


Fig. 170.

$$J_g = \Sigma\left(\frac{mh^2}{3}\right) = \frac{h^2}{3} \cdot \Sigma(m), \text{ d. h.}$$

$$J_g = \frac{M}{3} h^2 \quad . \; . \; . \; (186)$$

Setzt man statt M die Fläche des Rechteckes $b \cdot h$ ein, so ergibt sich das geometrische Trägheitsmoment

$$J_g = \frac{bh^3}{3} \quad . \; . \; . \; . \; (187)$$

206. Das Trägheitsmoment des Rechteckes in bezug auf die zur Grundlinie parallele Schwerachse. Fig. 170.

Auflösung: Laut Reduktionsformel (179) wird

$$J_s = J_g - M\frac{h^2}{4} = \frac{M}{3} h^2 - \frac{M}{4} h^2, \text{ d. h.}$$

$$J_s = \frac{M}{12} h^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (188)$$

Wird statt M die Fläche des Rechteckes $b \cdot h$ eingesetzt, so ergibt sich das geometrische Trägheitsmoment

$$J_s = \frac{bh^3}{12} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (189)$$

207. Polares Trägheitsmoment eines Rechteckes in bezug auf seinen Schwerpunkt als Pol. Fig. 170.

Auflösung: Laut (181) ist

$$J_p = J_s + J_{s'} = \frac{M}{12} h^2 + \frac{M}{12} b^2, \text{ somit}$$

$$J_p = \frac{M}{12} (b^2 + h^2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (190)$$

Das geometrische, polare Trägheitsmoment wird

$$J_p = \frac{1}{12} (b^3 h + b h^3) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (191)$$

208. Das Trägheitsmoment eines Dreieckes in bezug auf die zur Grundlinie parallele Schwerachse. Fig. 171.

Auflösung: Da die Dreiecksfläche ABC gleich ist der halben Fläche des Parallelogrammes $ABCD$, welches mit ihm gleiche Basis und gleiche Höhe

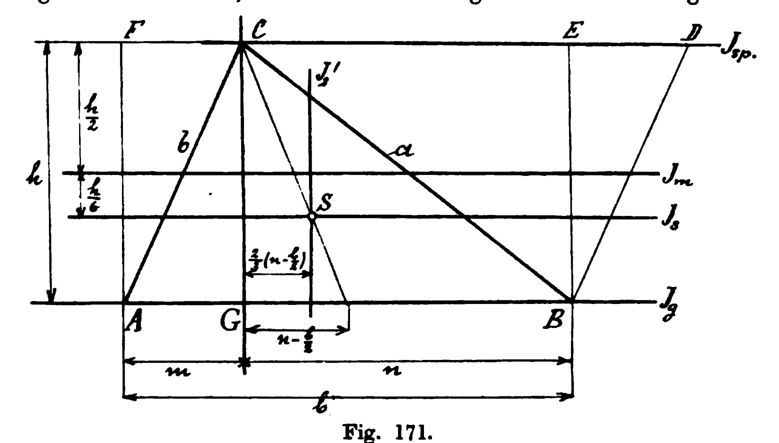


Fig. 171.

hat, so ist das Trägheitsmoment des Dreieckes in bezug auf eine zur Basis parallele, die Höhe halbierende Achse

$$J_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{2M}{12} h^2 = \frac{M}{12} h^2$$

Demnach in bezug auf die zur Grundlinie parallele Schwerachse

$$J_s = J_m - M\left(\frac{h}{6}\right)^2 = \frac{M}{12} h^2 - \frac{M}{36} h^2$$

$$J_s = \frac{M}{18} h^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (192)$$

Das geometrische Trägheitsmoment wird

$$J_s = \frac{bh^3}{36} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (193)$$

209. Das Trägheitsmoment eines Dreieckes in bezug auf die Grundlinie als Achse. Fig. 171.

Auflösung: $J_g = J_s + M\left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{M}{18} h^2 + \frac{M}{9} h^2 = \frac{6}{36} Mh^2$, somit

$$J_g = \frac{M}{6} h^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (194)$$

Das geometrische Trägheitsmoment ist

$$J_g = \frac{bh^3}{12} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (195)$$

210. Das Trägheitsmoment eines Dreieckes in bezug auf eine durch die Spitze parallel zur Grundlinie gelegte Achse. Fig. 171.

Auflösung:

$$J_{sp} = \frac{M}{18} h^2 + M \cdot \left(\frac{2}{3} h\right)^2 = \frac{M}{18} h^2 + \frac{4}{9} Mh^2, \text{ somit}$$

$$J_{sp} = \frac{M}{2} h^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (196)$$

Das geometrische Trägheitsmoment ist

$$J_{sp} = \frac{b\,h^3}{4} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (197)$$

211. Das polare Trägheitsmoment eines Dreieckes in bezug auf den Schwerpunkt als Pol. — Fig. 171. — Gegeben nur die Seiten a, b und c.

Auflösung: Es ist $J_p = J_s + J_{s'}$

Bedeuten $\triangle_1$ und $\triangle_2$ die Massen der Dreiecke ACG und BCG, dann läßt sich schreiben

$$J_{s'} = \frac{\triangle_1}{6} m^2 + \frac{\triangle_2}{6} n^2 - M\left[\frac{2}{3}\left(n - \frac{b}{2}\right)\right]^2$$

Da $\triangle_1 : \triangle_2 = \triangle\, ACG : BCG$

und $\triangle\, ACG : \triangle\, BCG = m : n$, folgt

$\triangle_1 : \triangle_2 = m : n$

Nun $(\triangle_1 + \triangle_2) : \triangle_1 = (m + n) : n$

und $(\triangle_1 + \triangle_2) : \triangle_2 = (m + n) : n$

Daraus $\triangle_1 = \frac{m}{m+n} M$ und $\triangle_2 = \frac{n}{m+n} \cdot M$

Demnach ergibt sich durch Substitution von $\triangle_1$ und $\triangle_2$

$$J_{s'} = \frac{m^3}{6\,(m+n)} \cdot M + \frac{n^3}{6\,(m+n)} \cdot M - \frac{M}{9}(2n - b)^2 = \frac{M}{6}(m^2 - mn + n^2) - \frac{M}{9}(n - m)^2$$

$$J_p = \frac{M}{18} h^2 + \frac{M}{6}(m^2 - mn + n^2) - \frac{M}{9}(n^2 - mn + m^2)$$

$$= \frac{M}{18}(h^2 + m^2 + n^2 + m \cdot n)$$

$$J_p = \frac{M}{36}\left[(h^2 + m^2) + (h^2 + n^2) + (m^2 + mn + n^2)\right]$$

$$J_p = \frac{M}{36}(a^2 + b^2 + c^2) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (198)$$

Das geometrische, polare Trägheitsmoment in bezug auf den Schwerpunkt als Pol ist dann

$$J_p = \frac{F}{36}(a^2 + b^2 + c^2) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (199)$$

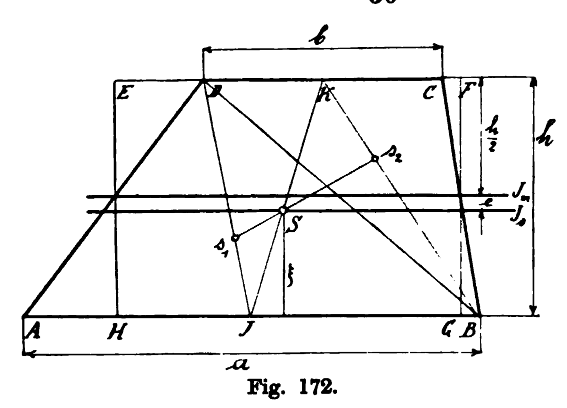


Fig. 172.

212. Geometrisches Trägheitsmoment des Trapezes in bezug auf die zur Grundlinie parallele Schwerachse. Fig. 172.

Auflösung: Das Trägheitsmoment des Trapezes in bezug auf die Achse J_m ist so groß wie dasjenige des flächengleichen Rechteckes, also

$$J_m = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{h^3}{12}$$

Dasselbe soll nun auf die Schwerachse reduziert werden. Zunächst ist hierzu ξ nötig.

$$\frac{bh}{2}\cdot\frac{2}{3}h+\frac{ah}{2}\cdot\frac{h}{3}=\frac{a+b}{2}\cdot h\cdot\xi$$

$$\xi=\frac{h}{3}\cdot\frac{a+2b}{a+b}$$

$$e=\frac{h}{2}-\xi=\frac{h}{2}-\frac{h}{3}\cdot\frac{a+2b}{a+b}=\frac{h}{6}\left[3-\frac{2(a+2b)}{a+b}\right]=\frac{h}{6}\cdot\frac{a-b}{a+b}$$

$$J_s=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{h^3}{12}-\frac{a+b}{2}\cdot h\cdot\left(\frac{h}{6}\cdot\frac{a-b}{a+b}\right)^2$$

$$J_s=\frac{a+b}{24}h^3-\frac{h^3}{72}\cdot\frac{(a-b)^2}{a+b}$$

$$J_s=\frac{h^3}{72}\cdot\frac{3(a+b)^2-(a-b)^2}{a+b}$$

$$J_s=\frac{h^3}{72}\cdot\frac{3a^2+6ab+3b^2-a^2+2ab-b^2}{a+b}$$

$$J_s=\frac{h^3}{72(a+b)}\cdot(2a^2+8ab+2b^2)$$

$$\boldsymbol{J_s=\frac{h^3}{36}\cdot\frac{a^2+4ab+b^2}{a+b}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(200)}$$

Fig. 173.

213. Geometrisches Trägheitsmoment eines gleichschenkligen Trapezes in bezug auf die die Mittelpunkte der Parallelseiten verbindende Achse. Fig. 173.

Auflösung:

$$J=\frac{hb^3}{12}+2\left[h\frac{\left(\frac{a-b}{2}\right)^3}{36}+\frac{h}{2}\cdot\frac{a-b}{2}\left(\frac{b}{2}+\frac{a-b}{6}\right)^2\right]$$

$$J=\frac{hb^3}{12}+2\left[\frac{h(a-b)^3}{8\cdot 36}+\frac{h}{4}(a-b)\left(\frac{a+2b}{6}\right)^2\right]$$

$$J=\frac{hb^3}{12}+\frac{2h(a-b)}{8\cdot 36}[(a-b)^2+2(a+2b)^2]$$

$$J=\frac{hb^3}{12}+\frac{2h(a-b)}{8\cdot 36}(a^2-2ab+b^2+2a^2+8ab+8b^2)$$

$$J=\frac{hb^3}{12}+\frac{2h(a-b)}{8\cdot 36}(3a^2+6ab+9b^2)$$

$$J=\frac{hb^3}{12}+\frac{2h(a-b)}{8\cdot 12}\cdot(a^2+2ab+3b^2)$$

$$J=\frac{h}{48}(4b^3+a^3-a^2b+2a^2b-2ab^2+3ab^2-3b^3)$$

$$J=\frac{h}{48}(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$$

$$J=\frac{h}{48}[a^2(a+b)+b^2(a+b)]$$

$$\boldsymbol{J=\frac{h}{48}(a^2+b^2)\cdot(a+b)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(201)}$$

214. Polares Trägheitsmoment eines regulären Polygons in bezug auf dessen Schwerpunkt als Pol. Fig. 174.

Auflösung: Das reguläre Polygon habe n Seiten und die Masse M. — Ein Dreieck SAB hat die Masse $\frac{M}{n}$. — Das Trägheitsmoment dieses Dreieckes in bezug auf die Achse $\overline{SF}$ ist

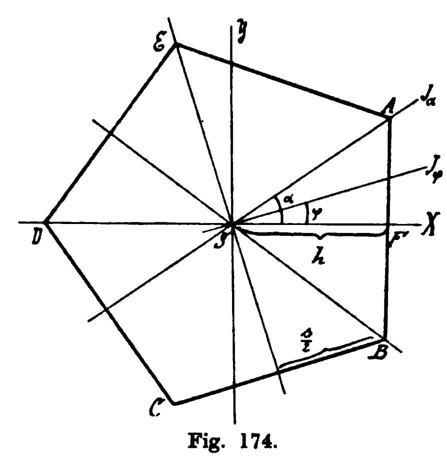


Fig. 174.

$$\triangle J_x = 2\frac{M}{2n}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{s}{2}\right)^2 = \frac{M}{24n}\cdot s^2$$

In bezug auf die zu $\overline{SF}$ senkrechte Achse ist dasselbe

$$\triangle J_y = \frac{M}{n}\cdot\frac{1}{2}h^2 = \frac{M}{2n}\cdot h^2$$

Daher ist das polare Trägheitsmoment dieses Dreieckes in bezug auf die Spitze als Pol

$$\triangle J_p = \frac{M}{24n}\cdot s^2 + \frac{M}{2n}\cdot h^2 = \frac{M}{n}\cdot\left(\frac{s^2}{24}+\frac{h^2}{2}\right)$$

$$\triangle J_p = \frac{M}{2n}\cdot\left(h^2+\frac{s^2}{12}\right)$$

Alle Dreiecke haben nun in bezug auf S dasselbe polare Trägheitsmoment, daher gilt für das ganze Polygon

$$J_p = \frac{M}{2}\left(h^2+\frac{s^2}{12}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (202)$$

Das geometrische, polare Trägheitsmoment des Polygons wird

$$J_p = \frac{F}{2}\left(h^2+\frac{s^2}{12}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (203)$$

Für den Kreis wird $s = 0$ und $h = \frac{d}{2}$, daher

$$\bigcirc J_p = \frac{M}{2}\left(\frac{d^2}{4}+0\right), \text{ somit}$$

$$\bigcirc J_p = \frac{M}{8}d^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (204)$$

Wird statt M die Fläche $\frac{\pi}{4}d^2$ gesetzt, so ergibt sich das geometrische, polare Trägheitsmoment des Kreises mit

$$\bigcirc J_p = \frac{\pi}{32}d^4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (205)$$

Für den Kreisring, Fig. 175, werden, wenn M die Masse des äußeren und m diejenige des inneren Kreises ist:

$$_{\text{mech}}J_p = \frac{M}{8}D^2 - \frac{m}{8}d^2 \text{ oder}$$

$$_{\text{mech}}J_p = \frac{1}{8}(MD^2 - m\,d^2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (206)$$

$$_{\text{geom}}J_p = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{4} D^4 - \frac{\pi}{4} d^4\right) \text{ oder}$$

$$_{\text{geom}}\boldsymbol{J_p} = \frac{\pi}{32}(\boldsymbol{D^4} - \boldsymbol{d^4}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (207)$$

215. Das äquatoriale Trägheitsmoment eines regulären Polygons in bezug auf eine Schwerachse. Fig. 175.

Auflösung: Das Trägheitsmoment des Polygons in bezug auf die Achse $\overline{SA}$ ist ebenso groß wie in bezug auf die Achse $\overline{SF}$, weil dieselbe ebenfalls durch den Schwerpunkt und einen Eckpunkt des Polygons hindurchgeht. Ist nun $\overline{SA}$ gegen die Achse $\overline{SF}$ unter dem Winkel α geneigt und heißt das Trägheitsmoment des Polygons in bezug auf sie J_α, so ist $J_\alpha = J_x$.

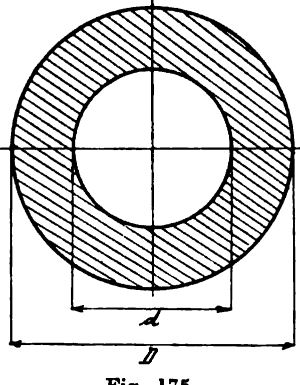


Fig. 175.

Somit wird laut Formel (180)

$$J_\alpha = J_x \cdot \cos^2\alpha + J_y \cdot \sin^2\alpha = J_x \text{ oder}$$
$$J_x \cdot (1 - \cos^2\alpha) = J_y \cdot \sin^2\alpha, \text{ d. h.}$$
$$J_\alpha = J_x = J_y$$

Das Trägheitsmoment des Polygons in bezug auf jede durch Schwerpunkt und Eckpunkt gehende Achse wäre demnach konstant.

Für eine unter dem Winkel φ gegen die Achse $\overline{SF}$ geneigte Achse ergibt sich

$$J_\varphi = J_x \cos^2\varphi + J_y \sin^2\varphi$$

Da $J_x = J_y$ ist, folgt

$$J_\varphi = J_x (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = J_x, \text{ d. h.}$$

$$\boldsymbol{J_x = J_y = J_\alpha = J_\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (208)$$

„Das Trägheitsmoment eines regulären Polygons ist für jede Schwerachse gleich."

Da die Summe zweier äquatorialen Trägheitsmomente in bezug auf zwei aufeinander senkrecht stehende Achsen das polare Trägheitsmoment des Querschnittes in bezug auf den Schnittpunkt dieser Achsen als Pol ist, folgt

$$\frac{M}{2}\left(h^2 + \frac{s^2}{12}\right) = J_x + J_y = 2\,J_x, \text{ daher}$$

$$\boldsymbol{J_x = J_y = \frac{M}{4}\left(h^2 + \frac{s^2}{12}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (209)$$

Das geometrische, äquatoriale Trägheitsmoment des Polygons ist dann

$$\boldsymbol{J_x = J_y = \frac{F}{4}\left(h^2 + \frac{s^2}{12}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (210)$$

Für den kreisförmigen Querschnitt ist das mechanische, äquatoriale Trägheitsmoment wegen $s = 0$ und $h = \frac{d}{2}$

$$\boldsymbol{J = \frac{M}{16} d^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (211)$$

und das geometrische, äquatoriale

$$J = \frac{\pi}{64} d^4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (212)$$

Für den ringförmigen Querschnitt ergibt sich das mechanische, äquatoriale Trägheitsmoment mit

$$J = \frac{M}{16} D^2 - \frac{m}{16} d^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (213)$$

und das geometrische, äquatoriale mit

$$J = \frac{\pi}{64} D^4 - \frac{\pi}{64} d^2 \text{ oder mit}$$

$$J = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (214)$$

216. Die geometrischen Trägheitsmomente einer Ellipse in bezug auf ihre Achsen zu suchen. Fig. 176.

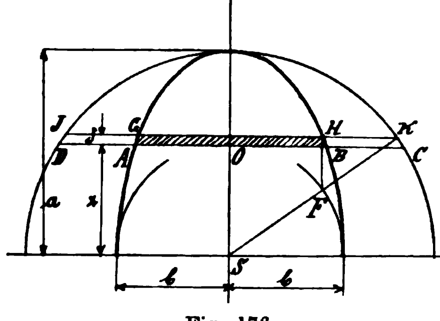


Fig. 176.

Auflösung: In bezug auf die kleine Achse ist das Trägheitsmoment des Flächenstreifens $ABGH$

$$\triangle J = \overline{AB} \cdot \delta \cdot x^2$$

Wegen $\overline{BO} : \overline{CO} = \overline{FS} : \overline{CS}$ oder $\overline{BO} : \overline{CO} = b : a$ ist

$$\overline{AB} = 2 \cdot \overline{OB} = \frac{b}{a} \cdot \overline{CO}$$

$$\triangle J = \frac{b}{a} \cdot \overline{CO} \cdot \delta \cdot x^2$$

Das Trägheitsmoment der Ellipse in bezug auf die kleine Achse ist demnach

$$J = 2 \cdot \Sigma\left(\frac{b}{a} \cdot \overline{CO} \cdot \delta \cdot x^2\right)$$

$$J = \frac{b}{a} \cdot \Sigma (2 \cdot \overline{CO} \cdot \delta \cdot x^2)$$

$2 \cdot \overline{CO} \cdot \delta$ ist der Inhalt des dem Kreise angehörenden Flächenstreifens $DCJK$. — Daher wird

$$J = \frac{b}{a} \cdot \Sigma (DCJK \cdot x^2)$$

$$J = \frac{b}{a} \cdot J_{\bigcirc} = \frac{b}{a} \cdot \frac{\pi}{4} a^4$$

$$J = \frac{\pi}{4} a^3 b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (215)$$

Ebenso findet man in bezug auf die große Achse

$$J_1 = \frac{\pi}{4} a \cdot b^3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (216)$$

§ 57. Graphische Ermittelung der Trägheitsmomente von ebenen Flächen nach dem Verfahren von Mohr.

Die gegebene Fläche wird parallel zur Achse $\overline{MN}$, in bezug auf welche das Trägheitsmoment gesucht werden soll, in eine große Zahl von Streifen zerlegt, Fig. 177.

Hierauf werden die Inhalte der Streifen $\overline{01}$, $\overline{12}$, ..., die als Kräfte betrachtet werden können, auf einer zur Trägheitsachse parallelen Geraden auf-

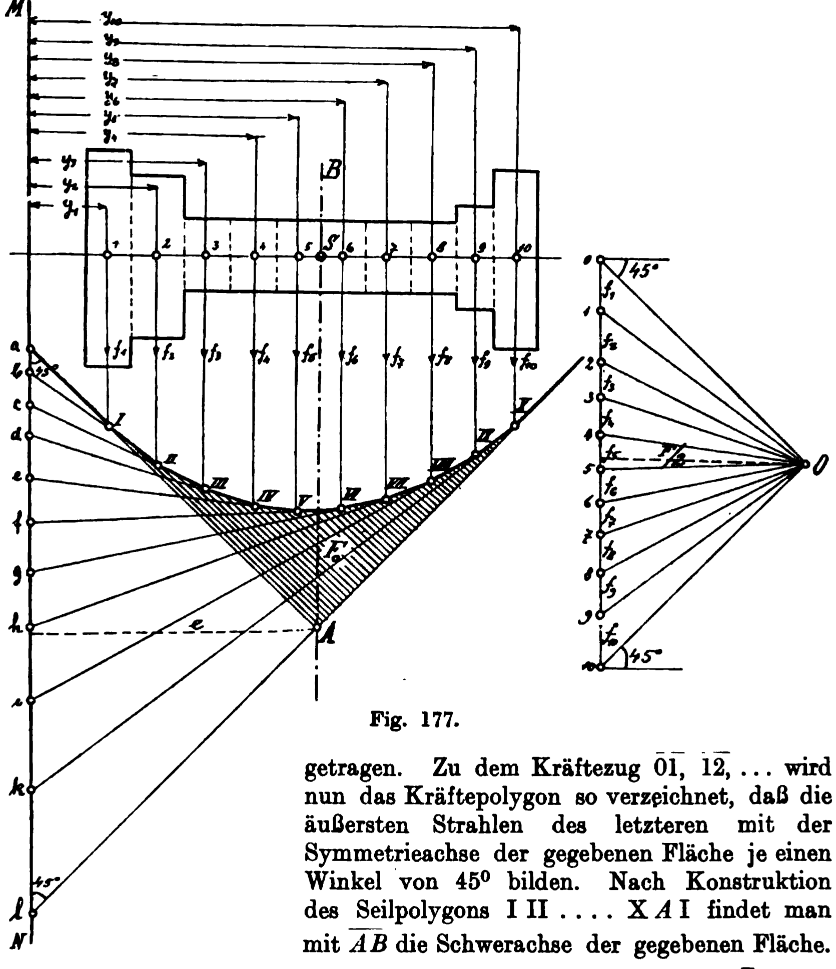


Fig. 177.

getragen. Zu dem Kräftezug $\overline{01}$, $\overline{12}$, ... wird nun das Kräftepolygon so verzeichnet, daß die äußersten Strahlen des letzteren mit der Symmetrieachse der gegebenen Fläche je einen Winkel von 45° bilden. Nach Konstruktion des Seilpolygons I II .... X A I findet man mit $\overline{AB}$ die Schwerachse der gegebenen Fläche.

Die Poldistanz ist laut Konstruktion gleich $^1/_2$ von $\overline{0,10}$, d. h. $\frac{F}{2}$ —

Werden die einzelnen Seilpolygonseiten bis zur Achse $\overline{MN}$ verlängert, so entstehen ein neuer Kräftezug und ein Kräftepolygon mit dem Pole A und der Poldistanz e.

Das Trägheitsmoment des ersten Flächenstreifens f_1 in bezug auf $\overline{MN}$ ist $f_1 y_1^2$ —

Da $\triangle\, 01\, O \sim ab\, I$, folgt $y_1 : \frac{F}{2} = \overline{ab} : f_1$, so daß sich ergibt

$$f_1 y_1 = \overline{ab} \cdot \frac{F}{2} \text{ und}$$

$$f_1 y_1^2 = \overline{ab} \cdot \frac{F}{2} \cdot y_1$$

$\overline{ab} \cdot y_1$ ist die doppelte Fläche abI. Demnach wird

$$f_1 y_1^2 = F \cdot fl\, abI$$

Desgleichen . . . . . . $f_2 y_2^2 = F \cdot fl\, bcII$

. .

. .

. .

$$f_{10} y_{10}^2 = F \cdot fl\, klX$$

Somit ist das gesuchte Trägheitsmoment in bezug auf die Achse $\overline{MN}$

$$J = \Sigma (fy^2) = F \cdot fl\, (aI\, II \;\ldots\; X\, la)$$

Für die Schwerachse $\overline{AB}$ wird

$$J_s = J - F \cdot e^2$$

Da das Dreieck $a\, Al$ gleichschenklig ist, folgt

$$\overline{al} = 2\, e \text{ und}$$

$$fl\, A\, al = 2\, e \cdot \frac{e}{2} = e^2$$

Dann wird $J_s = J - Fe^2 = F \cdot fl\, (aI\, II \;\ldots\; Xla) - F \cdot fl\, (A\, al)$

$$\mathbf{J_s = F \cdot F_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(217)}$$

wenn die von den Seilpolygonseiten und den Verlängerungen der äußersten Seilpolygonseiten eingeschlossene Fläche F_0 genannt wird.

§ 58. Trägheitsmomente von Körpern.

217. Das Trägheitsmoment eines Kreiszylinders in bezug auf seine Längsachse. Fig. 178.

Auflösung: Der Zylinder werde in unendlich dünne, konzentrische Schichten zerlegt. Das Trägheitsmoment einer solchen in der Entfernung ϱ von der Achse ist dann

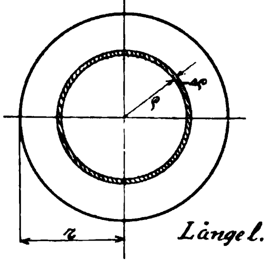


Fig. 178.

$$\triangle J = \left[(2\,\pi\,\varrho \cdot \triangle\,\varrho)\, l \cdot \frac{\gamma}{g}\right] \cdot \varrho^2$$

Somit ist das Gesamtträgheitsmoment

$$J = 2\pi\, l\, \frac{\gamma}{g} \cdot \Sigma (\varrho^3 \cdot \triangle\,\varrho)$$

Der Ausdruck $\Sigma (\varrho^3 \cdot \triangle\,\varrho)$ ist leicht und folgendermaßen zu ermitteln. Eine quadratische Pyramide mit der Seite r werde im Abstande ϱ von der Spitze

parallel zur Basis geschnitten, Fig. 179. Ein gleicher Schnitt werde in der Höhe $\triangle \varrho$ über letzterem geführt. Dann entsteht ein Körperchen mit quadratischer Basis, deren Seite ϱ ist, die Höhe desselben ist $\triangle \varrho$.

Die Summe der statischen Momente aller solchen unendlich kleinen Körperchen in bezug auf eine durch die Spitze der Pyramide parallel zur Basis liegenden Achse ist dann gleich dem statischen Momente der Pyramide selbst in bezug auf diese Achse, also

$$\Sigma[(\varrho^2 \cdot \triangle \varrho) \cdot \varrho] = r^2 \cdot \frac{r}{3} \cdot \frac{3}{4} r$$

$$\Sigma(\varrho^3 \cdot \triangle \varrho) = \frac{r^4}{4}$$

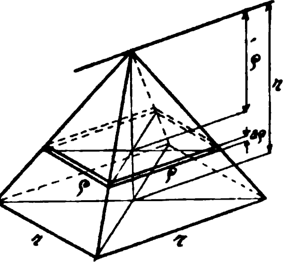


Fig. 179.

Somit wird . . . $J = \frac{2\pi l \gamma}{g} \cdot \frac{r^4}{4}$; da $M = \frac{\pi r^2 l \gamma}{g}$

die Masse des Zylinders ist, wird das gesuchte Trägheitsmoment

$$J = \frac{1}{2} M r^2 \qquad (218)$$

218. Trägheitsmoment eines Zylinders in bezug auf eine im Mittelpunkte der Höhe liegende und auf derselben senkrecht stehende Achse. Fig. 180.

Auflösung: Wird jede Zylinderhälfte durch unendlich viele, zur Basis parallele Schnitte geteilt, so entstehen dünne Scheiben vom Inhalte $\frac{\pi r^2 \cdot l}{n}$. Jede derselben kann als Kreis mit dem Trägheitsmomente

$$\frac{m}{16} d^2 = \frac{m}{4} r^2 = \frac{\pi r^2 l \gamma}{n \cdot g} \cdot \frac{r^2}{4}$$

betrachtet werden [laut (211)].

Fig. 180.

Demnach wird

$$J_s = 2\left\{\left[\frac{\pi r^2 l \gamma}{gn} \cdot \frac{r^2}{4}\right] + \left[\frac{\pi r^2 l \gamma}{gn} \cdot \left(\frac{l}{n}\right)^2 + \frac{\pi r^2 l \gamma}{gn} \cdot \frac{r^2}{4}\right] + \left[\frac{\pi r^2 l \gamma}{gn} \cdot \left(\frac{2l}{n}\right)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\pi r^2 l \gamma}{gn} \cdot \frac{r^2}{4}\right] + \cdots + \left[\frac{\pi r^2 l \gamma}{gn} \cdot \left(n \frac{l}{n}\right)^2 + \frac{\pi r^2 l \gamma}{gn} \cdot \frac{r^2}{4}\right]\right\}$$

$$J_s = 2 \frac{\pi r^2 l \gamma}{gn} \cdot \left\{n \frac{r^2}{4} + \left(\frac{l}{n}\right)^2 \cdot [1^2 + 2^2 + \ldots + n^2]\right\}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 /_{n=\infty} = \frac{n^3}{3} \text{(s. § 27, Beisp. 112)}$$

$$J_s = \frac{2\pi r^2 l \gamma}{gn} \cdot \left(n \frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{n^2} \cdot \frac{n^3}{3}\right)$$

Nun $M = \frac{\pi r^2 \cdot 2l \cdot \gamma}{g}$, daher

$$J_s = \frac{M}{n} \cdot \left(n \frac{r^2}{4} + \frac{l^2 n}{3}\right)$$

$$J_s = M\left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (219)$$

219. **Trägheitsmoment eines Hohlzylinders in bezug auf seine Höhe als Achse.** Fig. 181.

Auflösung: Wird der Hohlzylinder durch unendlich viele, zur Basis parallele Schnittebenen in Kreisringe zerlegt, so ist laut (206) das Trägheitsmoment eines solchen

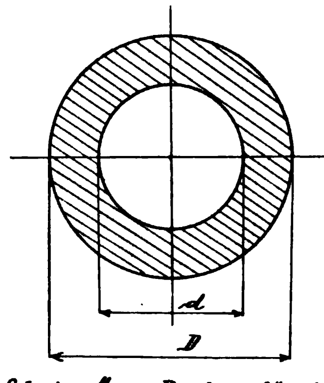


Fig. 181.

$$i = \frac{1}{8}(m_1 D^2 - m_2 d^2),$$

wenn m_1 und m_2 die Massen der ganzen und der inneren Kreisfläche bedeuten. Ist die Masse pro Flächeneinheit δ, so wird

$$i = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{4} D^2 \cdot \delta \cdot D^2 - \frac{\pi}{4} d^2 \cdot \delta \cdot d^2\right)$$

$$i = \frac{1}{8} \cdot \delta \cdot \frac{\pi}{4}(D^4 - d^4)$$

$$i = \frac{1}{8} \cdot \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)\, \delta \cdot (D^2 + d^2)$$

$$i = \frac{1}{8} \cdot \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) \cdot \delta \cdot 4\,(R^2 + r^2)$$

$$i = \frac{1}{2}(R^2 + r^2) \cdot \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) \cdot \delta$$

Nun ist $\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) \cdot \delta = m$, die Masse des Kreisringes. Es wird das Trägheitsmoment des Hohlzylinders dann

$$J = \Sigma(i) = \frac{1}{2} \cdot (R^2 + r^2) \cdot \Sigma\left[\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) \cdot \delta\right] = \frac{1}{2}(R^2 + r^2) \cdot \Sigma(m)$$

Ist M die Masse des Hohlzylinders, so ist endlich

$$J = \frac{1}{2} M (R^2 + r^2) \quad . \quad (220)$$

Fig. 182.

220. **Trägheitsmoment eines Kreiskegels in bezug auf die Höhe als Achse.** Fig. 182.

Auflösung: Der Kegel werde durch unendlich viele, zur Basis parallele Schnitte in Scheiben zerlegt. Jede solche kann als ein Kreis betrachtet werden. Die Inhalte der einzelnen Scheiben sind

$$\left(\frac{r}{n}\right)^2 \pi \frac{h}{n}, \quad \left(\frac{2r}{n}\right)^2 \pi \cdot \frac{h}{n}, \quad \left(\frac{3r}{n}\right)^2 \cdot \pi \frac{h}{n}, \quad \ldots \quad \left(\frac{nr}{n}\right)^2 \pi \frac{h}{n}$$

Die Trägheitsmomente derselben sind

$$\left(\frac{r}{n}\right)^2 \pi \frac{h}{n}\cdot\frac{\gamma}{g}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{r}{n}\right)^2,\quad \left(\frac{2r}{n}\right)^2 \pi \frac{h}{n}\cdot\frac{\gamma}{g}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2r}{n}\right)^2 \quad \ldots\ldots$$

Demnach wird das Trägheitsmoment des ganzen Kegels

$$J=\frac{\pi r^4 h\gamma}{2n^5\cdot g}\cdot(1^4+2^4+\ldots\ldots+n^4)$$

Die Summe in der Klammer kann erst bestimmt werden, wenn 1^3+2^3+ $+\ldots+n^3$ gefunden ist.

$$\begin{array}{llllll}
\text{Es gilt} & (n+1)^4=n^4 & +4n^3 & +6n^2 & +4n & +1 \\
\hline
n=0\ \ldots\ldots\ldots & 1^4=0 & +0 & +0 & +0 & +1 \\
n=1\ \ldots\ldots\ldots & 2^4=1^4 & +4\cdot 1^3 & +6\cdot 1^2 & +6\cdot 1 & +1 \\
n=2\ \ldots\ldots\ldots & 3^4=2^4 & +4\cdot 2^3 & +6\cdot 2^2 & +6\cdot 2 & +1 \\
\vdots & \vdots\quad\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
n\ldots(n-1)\ \ldots\ldots & n^4=(n-1)^4 & +4(n-1)^3 & +6(n-1)^2 & +4(n-1) & +1 \\
n\ldots n\ \ldots\ldots & (n+1)^4=n^4 & +4n^3 & +6n^2 & +4n & +1 \\
\hline
\end{array}$$

$$1^4+\ldots\ldots+n^4\,(n+1)^4=1^4+\ldots+n^4+4(1^3+\ldots+n^3)+6(1^2+\ldots+n^2)+$$
$$+4\,(1+\ldots+n)+(n+1)$$

$$(n+1)^4=4(1^3+\ldots+n^3)+6\cdot\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)+4\,\frac{n}{2}(n+1)+(n+1)$$

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{(n+1)^4}{4}-\frac{n}{4}(n+1)(2n+1)-\frac{n}{2}(n+1)-\frac{n+1}{4}$$

$$=\frac{n+1}{4}(n^3+3n^2+3n+1-2n^2-n-2n-1)$$

$$=\frac{n+1}{4}(n^3+n^2)=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2$$

Nun ebenso

$$\begin{array}{llllll}
 & (n+1)^5=n^5 & +5n^4 & +10n^3 & +10n^2 & +5n & +1 \\
\hline
n=0.\ldots\ldots & 1^5=0 & +0 & +0 & +0 & +0 & +1 \\
n=1.\ldots\ldots & 2^5=1^5 & +5\cdot 1^4 & +10\cdot 1^3 & +10\cdot 1^2 & +5\cdot 1 & +1 \\
n=2.\ldots\ldots & 3^5=2^5 & +5\cdot 2^4 & +10\cdot 2^3 & +10\cdot 2^2 & +5\cdot 2 & +1 \\
\vdots & \vdots\quad\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
n\ldots(n-1)\ldots & n^5=(n-1)^5 & +5(n-1)^4 & +10(n-1)^3 & +10(n-1)^2 & +5(n-1) & +1 \\
n\ldots n\ldots & (n+1)^5=n^5 & +5n^4 & +10n^3 & +10n^2 & +5n & +1 \\
\hline
\end{array}$$

$$1^5+\ldots+(n+1)^5=1^5+\ldots+n^5+5(1^4+\ldots+n^4)+10(1^3+\ldots+n^3)+$$
$$+10(1^2+\ldots+n^2)+5(1+\ldots+n)+(n+1)$$

$$(n+1)^5=5(1^4+\ldots+n^4)+10\frac{n^2(n+1)^2}{4}+10\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)+$$

$$+5\frac{n}{2}(n+1)+(n+1)$$

$$1^4+2^4+\ldots+n^4=\frac{(n+1)^5}{5}-\frac{2n^2(n+1)^2}{4}-2\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)-$$
$$-\frac{n}{2}(n+1)+\frac{n+1}{5}$$
$$=\frac{n+1}{30}[6(n+1)^4-15n^2(n+1)-10n(2n+1)-15n-6]$$
$$=\frac{n+1}{30}(6n^4+24n^3+36n^2+24n+6-15n^3-15n^2-20n^2-10n-15n-6)$$
$$=\frac{n+1}{30}(6n^4+9n^3+n^2-n)=\frac{6n^5+9n^4+n^3-n^2+6n^4+9n^3+n^2-n}{30}$$
$$1^4+2^4+\ldots+n^4=\frac{n^5}{5}-\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}$$

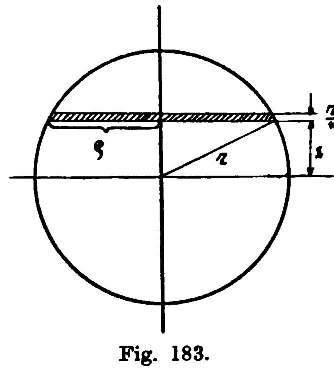


Fig. 183.

Daher wird

$$J=\frac{\pi r^4 h\gamma}{2n^5\cdot g}\cdot\left(\frac{n^5}{5}-\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}\right)$$
$$=\frac{\pi r^4 h\gamma}{2g}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}-\frac{1}{30}\right)$$
$$J=\frac{\pi r^4 h\gamma}{10g} \quad \text{für } n=\infty$$
$$M=\frac{\pi r^2 h\gamma}{3g};\quad \frac{J}{M}=\frac{3}{10}r^2$$
$$J=\frac{3}{10}Mr^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (221)$$

221. Das Trägheitsmoment einer Kugel in bezug auf eine Schwerachse zu finden. Fig. 183.

Auflösung: Jede Halbkugel werde durch unendlich viele, parallele Schnittebenen senkrecht zur Trägheitsachse in Kreisscheiben zerlegt. Das polare Trägheitsmoment einer solchen ist dann

$$\triangle J=\varrho^2\pi\cdot\frac{r}{n}\cdot\frac{\gamma}{g}\cdot\frac{1}{2}\varrho^2=(r^2-x^2)\cdot\pi\cdot\frac{r\gamma}{ng}\cdot\frac{1}{2}(r^2-x^2)$$

Das Trägheitsmoment der Halbkugel wird daher

$$J=\frac{\pi r\gamma}{2ng}\left\{\left[r^2-\left(\frac{r}{n}\right)^2\right]^2+\left[r^2-\left(\frac{2r}{n}\right)^2\right]^2+\left[r^2-\left(\frac{3r}{n}\right)^2\right]^2+\ldots\left[r^2-\left(\frac{nr}{n}\right)^2\right]^2\right\}$$
$$J=\frac{\pi r\gamma}{2ng}\left[nr^4-2r^2\cdot\left(\frac{r}{n}\right)^2\cdot(1^2+\ldots+n^2)+\left(\frac{r}{n}\right)^4\cdot(1^4+\ldots+n^4)\right]$$
$$J=\frac{\pi r\gamma}{2ng}\cdot\left[nr^4+\left(\frac{r}{n}\right)^4\cdot\left(\frac{n^5}{5}-\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}\right)-\frac{2r^4}{n^2}\cdot\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)\right]$$
$$\underset{n=\infty}{J}=\frac{\pi r\gamma}{2g}\cdot\left[r^4+\frac{r^4}{5}-\frac{2r^4}{3}\right]=\frac{\pi r^5\gamma}{2g}\left(1+\frac{1}{5}-\frac{2}{3}\right)$$
$$J=\frac{8}{15}\cdot\frac{\pi r^5\gamma}{2g}=\frac{4}{15}\frac{\pi r^5\gamma}{g}$$

Für die ganze Kugel ist daher

$$J = \frac{8}{15} \cdot \frac{\pi r^5 \gamma}{g}$$

$$M = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi r^3 \gamma}{g}$$

$$\frac{J}{M} = \frac{\frac{8}{15}}{\frac{4}{3}} r^2 = \frac{2}{5} r^2$$

$$J = \frac{2}{5} M r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (222)$$

---

§ 59. Beispiele über die gleichförmig rotierende Bewegung starrer Körper um eine feste Achse.

222. Auf einer Welle mit dem Radius r sitzt eine Scheibe mit dem Radius R. Wie viele Touren macht diese Scheibe, bis die Bewegung durch den Reibungswiderstand in den Lagern der Welle aufgehoben ist, wenn im Momente der Betrachtung die Umfangsgeschwindigkeit der letzteren c beträgt und der Reibungskoeffizient φ ist? Die Wellenmasse ist nicht zu berücksichtigen.

Auflösung: Die lebendige Kraft der Scheibe ist $\frac{\omega^2}{2} \cdot J$, die Arbeit des Reibungswiderstandes an den beiden Zapfen bis zum Eintreten des Ruhezustandes $\varphi G \cdot x$, wenn bis dahin ein Punkt des Zapfenumfanges den Weg x beschreibt. Es muß demnach sein

$$\frac{\omega^2}{2} \cdot J = \varphi \cdot G \cdot x$$

$$\frac{c^2}{2 r^2} \cdot \frac{G}{2 g} R^2 = \varphi G x$$

$$\frac{c^2}{4 r^2} \cdot \frac{G}{g} \cdot R^2 = \varphi G x$$

$$x = \frac{c^2 \cdot R^2}{4 \varphi g r^2} = 2 r \pi n,$$

wenn n die verlangte Tourenzahl ist

$$n = \frac{c^2 \cdot R^2}{4 \varphi g r^2 \cdot 2 r \pi}$$

$$n = \frac{c^2 \cdot R^2}{8 \varphi g \cdot \pi \cdot r^3}$$

223. Ein starrer Körper dreht sich n mal in der Minute um eine feste Achse. Wie groß ist seine Winkelgeschwindigkeit?

Auflösung:
$$\omega = \frac{2 \cdot 1 \cdot \pi \cdot n}{60}$$

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (223)$$

224. Auf einer Welle sitzt eine Schnurrolle und ein Arm. Am Ende des letzteren befindet sich eine Bleikugel mit einem Halbmesser $r = 0{,}482$ m. Welche Winkelgeschwindigkeit, Tourenzahl und Umlaufzeit hat die Kugel. wenn die Schnur mit einer Kraft von 20 kg . . . 5 m abgezogen wird? Das spezifische Gewicht des Blei beträgt 11.3 kg/cdm. Fig. 184.

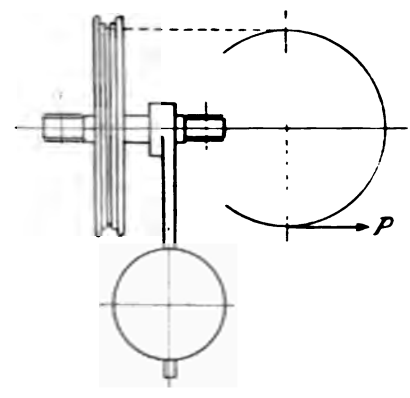


Fig. 184.

Auflösung: Der Kugel wird durch das Ziehen an der Schnur ein Arbeitsvermögen

$$L = 20 \cdot 5 = 100 \text{ kgm}$$

mitgeteilt. Daher gilt

$$100 = \frac{\omega^2}{2} \cdot J$$

$$J = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} r^3 \cdot \pi \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot r^2$$

$$J = \frac{8}{15} \pi \cdot \frac{11300}{9{,}81} \cdot 0{,}482^5$$

$$J \sim 50$$

$$\frac{\omega^2}{2} = 2; \qquad \omega^2 = 4$$

$$\omega = 2$$

$$\omega = \frac{\pi n}{30}, \qquad n = \frac{30}{\pi} \cdot \omega = \frac{60}{\pi}$$

$$n = 19{,}1$$

$$\omega \cdot t = 2\pi$$

$$t = \frac{2\pi}{\omega} = \pi \text{ Sek.}$$

Umlaufzeit = π Sek.

225. Ein Eisenanker, Fig. 185, hat 80 mm Durchmesser und ist 5,5 kg schwer. Die Wicklung um ihn ist 10 mm stark und 2 kg schwer. Im Momente der Stromabstellung hat der Anker $n = 1500$ Touren. Wie lange rotiert er noch, wenn der Zapfendurchmesser $d = 15$ mm und der Zapfenreibungskoeffizient $\varphi = 0{,}03$ sind? (Die Bürsten sind abgehoben.)

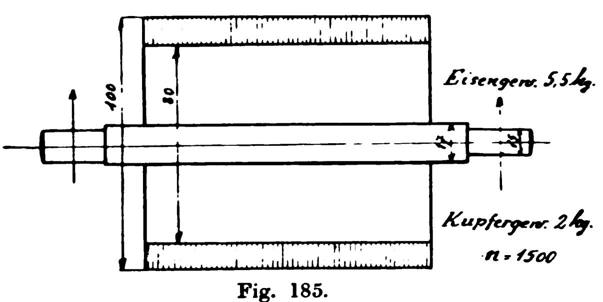


Fig. 185.

Auflösung: Die lebendige Kraft des Ankers und der Wicklung, welche als Hohlzylinder anzusehen ist, wird durch die Widerstände an dem Zapfen vernichtet. Es gilt dann

$$\frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{m}{2} \cdot r^2 + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{M}{2} (R^2 + r^2) = \varphi \cdot G \cdot x$$

In dieser Gleichung sind $m = \frac{5,5}{9,81}$, $M = \frac{2}{9,81}$ und x der Weg, welchen ein Punkt eines Zapfenumfangs beschreibt, bis Ruhe eintritt.

Es folgt dann weiter

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi n}{30}\right)^2 \cdot \left[\frac{5,5}{2 \cdot 9,81} \cdot 0,04^2 + \frac{2}{2 \cdot 9,81} \cdot (0,05^2 + 0,04^2)\right] = 0,03 \cdot 7,5 \cdot x$$

$$x = \frac{\pi^2 \cdot 1500^2 \cdot \left[\frac{5,5}{2 \cdot 9,81} \cdot 0,0016 + \frac{1}{9,81} \cdot 0,0041\right]}{2 \cdot 900 \cdot 0,03 \cdot 7,5}$$

π^2 kann gegen 9,81 gekürzt werden, so daß sich ergibt

$$x = \frac{1500^2 \cdot [5,5 \cdot 0,0016 + 2 \cdot 0,0041]}{4 \cdot 900 \cdot 0,03 \cdot 7,5}$$

$$x = \frac{22\,500 \cdot 0,017}{36 \cdot 0,03 \cdot 7,5}$$

$$x \sim 47 \text{ m}$$

47 m ist der Weg einer gleichförmig verzögerten Bewegung

$$47 = \frac{c + v}{2} \cdot t = \frac{c}{2} \cdot t$$

$$47 = 0,5 \cdot \frac{0,015 \cdot \pi \cdot 1500}{60} \cdot t = 0,59\, t$$

$$t \sim 80 \text{ Sek.} \sim 1 \text{ Min. } 20 \text{ Sek.}$$

---

§ 60. Beispiele über die beschleunigt rotierende Bewegung starrer Körper.

226. Ein horizontal und zentrisch gelagerter, voller, homogener Zylinder mit $r = 40$ cm Durchmesser und $G = 2000$ kg Gewicht wird durch eine Umfangskraft $P = 50$ kg angetrieben. Wie lange dauert es, bis er $n = 120$ Touren macht? $g \sim 10$ m.

α) Ohne Rücksicht auf die Zapfenreibung.

β) Mit Rücksicht auf dieselbe. — Zapfenreibungskoeffizient $\varphi = 0,1$. — Zapfendurchmesser $d = 60$ mm.

Auflösung ad a): $$D = \varepsilon \cdot J$$

$$\varepsilon = \frac{50 \cdot 0,2}{\frac{2000}{10 \cdot 2} \cdot 0,04} = \frac{10}{4} = 2,5$$

Die Bahnbeschleunigung ist $p = r \cdot \varepsilon = 0,2 \cdot 2,5 = 0,5$

Dann $$v = \frac{2\, r \pi n}{60} = \frac{0,4\, \pi n}{60} = \frac{0,4\, \pi \cdot 120}{60}$$

$$v \sim 2,5 \text{ m}$$

$$2,5 = p \cdot t$$

$$t = \frac{2,5}{0,5}$$

$$t \sim 5 \text{ Sek.}$$

ad b):

$$D = 50 \cdot 0{,}2 - \varphi \cdot 2000 \cdot 0{,}03 = 4$$

$$\varepsilon = \frac{4}{\frac{2000}{2 \cdot 10} \cdot 0{,}04} = \frac{4}{4} = 1$$

$$p = r \cdot \varepsilon = 0{,}2 \cdot 1 = 0{,}2$$

$$v = \frac{2\,r\,\pi\,n}{60} \sim 2{,}5 \text{ m}$$

$$2{,}5 = p \cdot t$$

$$t = \frac{2{,}5}{0{,}2}$$

$$\boldsymbol{t \sim 12{,}5} \textbf{ Sek.}$$

227. Um einen Kreiszylinder vom Halbmesser r, der sich um eine horizontale Achse reibungsfrei drehen kann, ist ein Faden geschlungen, der an seinem freien Ende ein Gewicht $G = mg$ trägt. Welche Fadenspannung, Winkelbeschleunigung entstehen, welche Endgeschwindigkeit hat das Gewicht, wenn es die Höhe h gefallen ist, und welche Zeit ist hierzu nötig? Der Zylinder habe das Trägheitsmoment J. — Fig. 186.

Fig. 186.

Auflösung: Das Gewicht G ruft im Faden die Spannung S hervor. Letztere bewirkt, da sie konstant ist, eine gleichförmig beschleunigte, rotierende Bewegung des Zylinders. Die Winkelbeschleunigung desselben ε wird daher aus

$$S \cdot r = \varepsilon \cdot J$$

$$\varepsilon = \frac{S \cdot r}{J}$$

Die Kraft $(G - S)$ beschleunigt die Masse m, so daß deren Beschleunigung

$$p = \frac{G - S}{m} = r \cdot \varepsilon$$

wird. Somit ist

$$\varepsilon = \frac{G - S}{m\,r} = \frac{S \cdot r}{J}$$

$$(G - S) \cdot J = m\,S \cdot r^2$$

$$G \cdot J - S \cdot J = m\,S \cdot r^2$$

$$S\,(m\,r^2 + J) = G \cdot J$$

$$\boldsymbol{S = \frac{G \cdot J}{m\,r^2 + J}}$$

$$\varepsilon = \frac{S \cdot r}{J} = \frac{G \cdot J}{m\,r^2 + J} \cdot \frac{r}{J}, \text{ d. h.}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon = \frac{G \cdot r}{m\,r^2 + J}}$$

Laut Satz von der Energie in § 49 ist weiter

$$A = G \cdot h = J \frac{\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$$

$$G \cdot h = J \frac{v^2}{2 r^2} + m \frac{v^2}{2}$$

$$G \cdot h = \frac{v^2}{2 r^2} (J + m r^2)$$

$$v = r \cdot \sqrt{\frac{2 G h}{J + m r^2}}$$

$$p = r \cdot \varepsilon = r \cdot \frac{G \cdot r}{m r^2 + J} = \frac{G \cdot r^2}{J + m r^2} \quad \text{und} \quad v = p \cdot t$$

$$t = \frac{v}{p} = \frac{r \cdot \sqrt{\frac{2 G \cdot h}{J + m r^2}}}{\frac{G \cdot r^2}{J + m r^2}}$$

$$t = \frac{r \cdot \sqrt{2 G \cdot h (J + m r^2)}}{G \cdot r^2}$$

$$t = \frac{\sqrt{2 G h (J + m r^2)}}{G \cdot r}$$

$$t = \sqrt{\frac{2 h (J + m r^2)}{G \cdot r}}$$

Fig. 187.

228. Wie groß müßte G sein, damit die Fallbeschleunigung $p = \frac{g}{2}$ werde?

Auflösung:
$$p = \frac{G \cdot r^2}{J + m r^2} = \frac{G \cdot r^2}{J + \frac{G}{g} \cdot r^2} = \frac{g}{2}$$

$$2 G \cdot r^2 = J \cdot g + \frac{G}{g} r^2 \cdot g$$

$$G r^2 = J g$$

$$G = \frac{J \cdot g}{r^2}$$

229. Um einen Zylinder ist ein Faden mehrmals gewickelt und dessen freies Ende aufgehängt. Mit welcher Beschleunigung fällt der Zylinder und wie groß ist die Spannung im Faden? Fig. 187.

Auflösung: Die Energie des Zylinders nach Fallen um die Höhe h ist

$$m g h = \frac{m v^2}{2} + \frac{J \omega^2}{2} = \frac{m v^2}{2} + \frac{m r^2}{2} \cdot \frac{\left(\frac{v}{r}\right)^2}{2} = \frac{3}{4} m v^2$$

$$m g h = \frac{3}{4} m v^2$$

$$v = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{2}{3} g\right) h}$$

$$p = \frac{2}{3} g \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (224)$$

d. h. der Zylinder fällt mit einer Beschleunigung, welche gleich $^2/_3$ der Erdbeschleunigung ist. Ursache dafür ist der Drehungszwang des Zylinders.

$$\text{Nun ist} \quad \varepsilon = \frac{2}{3} \cdot \frac{g}{r} = \frac{M}{J} = \frac{S \cdot r}{\frac{m r^2}{2}}$$

$$\text{woraus } S = \frac{2}{3} \cdot \frac{g}{r} \cdot \frac{m r^2}{2} \cdot \frac{1}{r} \text{ folgt.}$$

$$S = \frac{G}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (225)$$

d. h. die Fadenspannung ist gleich dem dritten Teil des Zylindergewichtes.

230. Um die horizontale Achse eines Zylinders mit dem Gewichte $G\,kg$ ist ein Faden mehrmals gewickelt und dessen freies Ende aufgehängt. Mit welcher Beschleunigung p fällt der Zylinder und welche Fadenspannung entsteht, wenn der Radius der Achse ϱ und der des Zylinders r ist? Die Masse der Achse ist nicht zu berücksichtigen. — Fig. 188.

Auflösung: Ist der Zylinder die Höhe h gefallen, so lautet die Arbeitsgleichung

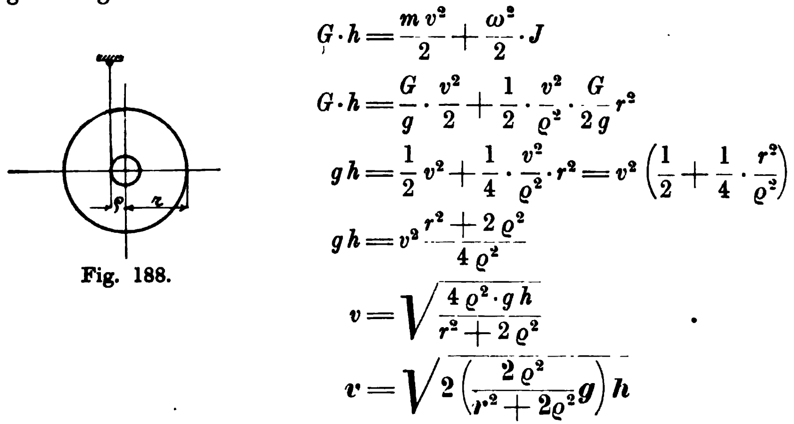


Fig. 188.

$$G \cdot h = \frac{m v^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} \cdot J$$

$$G \cdot h = \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{\varrho^2} \cdot \frac{G}{2 g} r^2$$

$$g h = \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{v^2}{\varrho^2} \cdot r^2 = v^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{r^2}{\varrho^2}\right)$$

$$g h = v^2 \frac{r^2 + 2 \varrho^2}{4 \varrho^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{4 \varrho^2 \cdot g h}{r^2 + 2 \varrho^2}}$$

$$v = \sqrt{2 \left(\frac{2 \varrho^2}{r^2 + 2 \varrho^2} g\right) h}$$

Die Beschleunigung, mit welcher der Zylinder fällt, wird also

$$p = \frac{2 \varrho^2}{r^2 + 2 \varrho^2} \cdot g \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (226)$$

Wäre z. B. $r = 4 \varrho$, so würde folgen $p = \frac{2 \varrho^2}{18 \varrho^2} \cdot g = \frac{1}{9} g$; der Zylinder würde dann neunmal so langsam fallen, als wenn er frei fiele.

Die Winkelbeschleunigung des Zylinders wird dann

$$\varepsilon = \frac{p}{\varrho} = \frac{2 \varrho^2}{r^2 + 2 \varrho^2} \cdot g = \frac{D}{J}$$

$$\frac{2 \varrho^2}{r^2 + 2 \varrho^2} \cdot g = \frac{S \cdot \varrho}{\frac{m r^2}{2}}$$

$$S = \frac{m r^2 \cdot \varrho}{r^2 + 2 \varrho^2} \cdot g$$

Da $mg = G$ ist, wird somit

$$S = G \cdot \frac{r^2}{r^2 + 2\varrho^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (227)$$

Für $r = 4\varrho$ wird $S = \frac{8}{9} G$, d. h. größer als im vorigen Falle.

231. Um einen Zylinder ist ein Faden gewickelt und dessen ablaufendes Ende am höchsten Punkte einer h Meter hohen und mit dem Horizonte den Winkel α bildenden schiefen Ebene befestigt. Mit welcher Beschleunigung rollt der Zylinder die schiefe Ebene herunter und wie groß ist die entstehende Fadenspannung? Fig. 189.

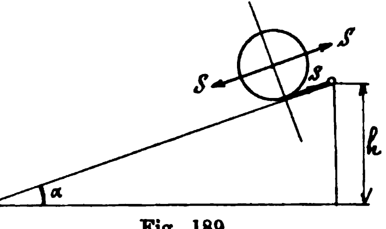


Fig. 189.

Auflösung: Man denke sich im Zylindermittel zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte S angebracht. Die nach abwärts wirkende gibt mit der Fadenspannung S das den Zylinder nach abwärts rollende Kräftepaar, die nach aufwärts wirkende verringert die Wirkung von $G \sin \alpha$. — Laut Beschleunigungsgesetz gilt dann

$$G \sin \alpha - S = \frac{G}{g} \cdot r\,\varepsilon,$$

$$\text{hierzu } S \cdot r = \varepsilon \cdot J$$

Aus letzterer Gleichung ergibt sich

$$S = \frac{\varepsilon \cdot J}{r}$$

Wird dieser Wert in die obere Gleichung substituiert, so erhält man

$$G \sin \alpha - \frac{\varepsilon \cdot J}{r} = \frac{G}{g} \cdot r\,\varepsilon$$

$$G \sin \alpha = \varepsilon \left(\frac{G}{g} \cdot r + \frac{J}{r} \right)$$

$$G \sin \alpha = \varepsilon \cdot G \left(\frac{r}{g} + \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{g} r^2 \right)$$

$$\sin \alpha = \varepsilon \left(\frac{r}{g} + \frac{r}{2g} \right)$$

$$g \sin \alpha = \varepsilon \cdot \frac{3}{2} r$$

$$r \cdot \varepsilon = \frac{2}{3} g \sin \alpha$$

$$p = \frac{2}{3} g \sin \alpha \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (228)$$

$$S = \frac{\frac{2}{3} g \sin \alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{G}{g} r^2}{r^2}$$

$$S = \frac{G}{3} \sin \alpha \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (229)$$

232. Wie lauten die Bedingungen dafür, daß ein Zylinder von einer unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigten Ebene a) herunterrolle, b) heruntergleite, wenn der Koeffizient der gleitenden Reibung f ist?

Auflösungen: *Ad a)* Genau so wie in der vorhergehenden Aufgabe die Fadenspannung S die drehende Bewegung des Zylinders zustande gebracht hat, wird hier das Rollen desselben durch die Reibung zwischen ihm und der schiefen Ebene bewirkt, wenn die Beziehung besteht,

$$f\,G\cos\alpha \geq \frac{G}{3}\sin\alpha$$

Bedingung für das Rollen $f \geq \frac{1}{3}\operatorname{tg}\alpha$ . . . . **(230)**

Ad b) Soll der Zylinder gleiten, so muß die Beziehung lauten

$$f\,G\cos\alpha \leq G\sin\alpha$$

Bedingung für das Gleiten $f \leq \operatorname{tg}\alpha$ . . . . **(230a)**

233) Wie groß muß der Koeffizient der gleitenden Reibung mindestens sein, damit der in Fig. 190 gezeichnete Zylinder mit seinen beiden Endzapfen auf 2 unter Winkel α gegen den Horizont geneigten Ebenen herabrolle?

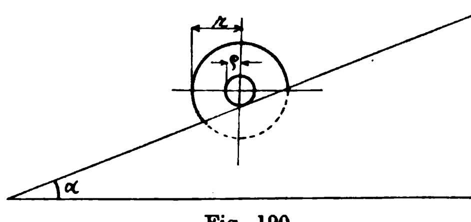


Fig. 190.

Auflösung: Man denke sich um die Zapfen je einen Faden gewickelt und deren freie Enden befestigt. Die in beiden letzteren entstehenden Spannungen seien zusammen S. — Dann gelten wieder die Gleichungen

$$G\cdot\sin\alpha - S = \frac{G}{g}\cdot\varrho\,\varepsilon$$

$$\text{und } S\cdot\varrho = \varepsilon\cdot J$$

Es handelt sich um die Bestimmung von S.

$$\varepsilon = \frac{S\cdot\varrho}{J}$$

$$G\cdot\sin\alpha - S = \frac{G}{g}\cdot\varrho\cdot\frac{S\cdot\varrho}{J}$$

$$G\cdot\sin\alpha - S = \frac{G}{g}\cdot\varrho^2\cdot\frac{S}{\frac{G}{2g}\cdot r^2}$$

$$G\sin\alpha = S + S\cdot\frac{2\varrho^2}{r^2} = S\left(1 + \frac{2\varrho^2}{r^2}\right)$$

$$G\sin\alpha = S\cdot\frac{r^2 + 2\varrho^2}{r^2}$$

$$S = \frac{r^2\cdot\sin\alpha}{r^2 + 2\varrho^2}\cdot G$$

Die Bedingung für das Rollen ist nun

$$\frac{r^2\sin\alpha}{r^2 + 2\varrho^2}\cdot G \geq f\cdot G\cos\alpha$$

$$f \leq \frac{r^2}{r^2 + 2\varrho^2}\cdot\operatorname{tg}\alpha$$

234. Mit welcher Beschleunigung rollt eine Kugel unter dem Einfluß der Reibung von einer unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigten Ebene herunter und unter welcher Bedingung findet dies statt?

Auflösung: Die Reibung kann wieder ersetzt werden durch die Fadenspannung S, so daß sich die Gleichungen schreiben lassen,

$$G \sin \alpha - S = \frac{G}{g} \cdot r \varepsilon$$

$$S \cdot r = \varepsilon \cdot J$$

$$S = \frac{\varepsilon \cdot J}{r}$$

$$G \sin \alpha - \frac{\varepsilon \cdot J}{r} = \frac{G}{g} \cdot r \varepsilon$$

$$G \sin \alpha - \frac{\varepsilon}{r} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{G}{g} \cdot r^2 = \frac{G}{g} r \varepsilon$$

$$g \sin \alpha = \frac{2}{5} r \varepsilon + r \varepsilon = \frac{14}{10} r \varepsilon = \frac{7}{5} r \varepsilon$$

$$p = r \varepsilon = \frac{5}{7} g \sin \alpha \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (231)$$

Die Fadenspannung muß ebenfalls gesucht werden, da ihre Größe zur Beantwortung der andern Frage nötig ist.

$$S = \frac{\varepsilon \cdot J}{r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{g \sin \alpha}{r} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{G}{g} r^2$$

$$S = \frac{2}{7} G \sin \alpha \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (232)$$

Die Bedingung dafür, daß ein Rollen der Kugel stattfinde, ist daher

$$\frac{2}{7} G \sin \alpha = f \cdot G \cos \alpha,$$

woraus sich ergibt

$$f = \frac{2}{7} \operatorname{tg} \alpha \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (233)$$

Auf Grund der in diesem § gezeigten Beispiele können nun schwierigere Aufgaben über gleichzeitig erfolgende gleitende und rollende Bewegung einfacher und zusammengesetzter Körper leicht durchgeführt werden.

§ 61. Bewegung eines physischen Pendels.

Jeder um eine feste Achse schwingender Körper heißt ein **physisches oder zusammengesetztes Pendel**, Fig. 191.

Das Moment des Pendelgewichtes Mg in bezug auf seinen Drehpunkt O ist

$$Mg \cdot s \cdot \sin \delta,$$

wenn s die Entfernung des Schwerpunktes vom Aufhängepunkte und δ die jeweilige Elongation bedeuten.

Die Winkelbeschleunigung eines rotierenden Körpers ist nun laut (177) das Verhältnis aus Drehmoment und dessen Trägheitsmoment, also hier beim physischen Pendel

$$\varepsilon_1 = \frac{M g s \cdot \sin \delta}{J_o}$$

Ein mathematisches Pendel mit der Länge $\overline{OK} = l$ schwinge ebenfalls um O; seine Winkelbeschleunigung ist

$$\varepsilon_2 = \frac{mg \cdot l \cdot \sin \delta}{ml^2}$$

Soll nun das physische Pendel genau so schwingen wie das mathematische, dann muß sein

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \text{ oder}$$

$$\frac{Mg \cdot s \cdot \sin \delta}{J_o} = \frac{mgl \cdot \sin \delta}{ml^2}, \text{ d. h.}$$

$$l = \frac{J_o}{Ms} = \frac{\textbf{Trägheitsmoment}}{\textbf{Statisches Moment}} \quad \ldots\ldots \quad (234)$$

„Jene Länge eines physischen Pendels, bei welcher dasselbe dieselbe Schwingungsdauer besitzt wie ein mathematisches, heißt **reduzierte Länge des physischen Pendels.**“

Hier ist also l die reduzierte Länge. —

„Jener Punkt eines physischen Pendels, welcher um die reduzierte Pendel-

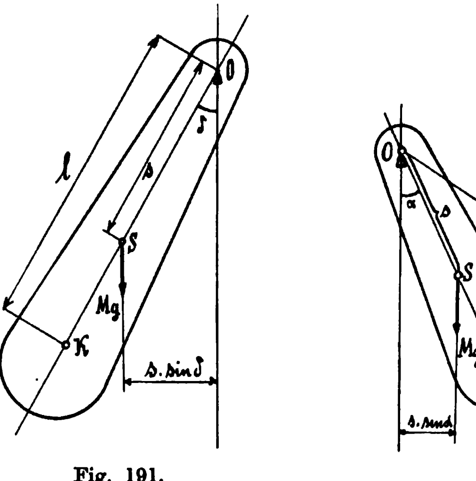


Fig. 191.

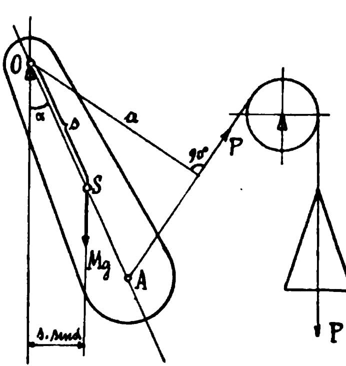


Fig. 192.

länge von der Schwingungsachse absteht, heißt der **Schwingungsmittelpunkt des physischen Pendels.**“

Somit wird die **Schwingungsdauer eines physischen Pendels**

$$t = \pi \sqrt{\frac{J_o}{Mgs}} = \pi \sqrt{\frac{\text{Reduzierte Länge}}{g}} \quad \ldots\ldots \quad (235)$$

Mittels letzterer Gleichung kann man das Trägheitsmoment von Körpern experimentell wie folgt ermitteln.

Man bringe die Schwingungsachse O an, Fig. 192, und befestige in irgend einem Punkte A des Körpers einen Faden. Der letztere wird nun über eine

Rolle geführt und an seinem freien Ende eine Wagschale angehängt. Wird in diese ein Gewicht P gelegt, so stellt sich die Achse des Körpers unter Winkel α gegen die Vertikale ein, und es folgt

$$G \cdot s \cdot \sin\alpha = P \cdot a$$

$$G \cdot s = \frac{P \cdot a}{\sin\alpha}$$

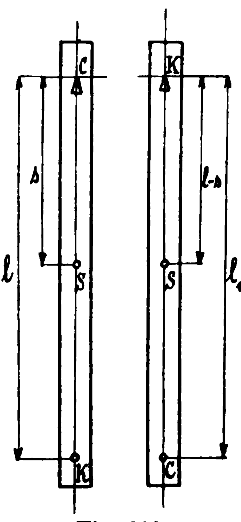


Fig. 193.

Das statische Moment des Körpers ist also bestimmt. Selbstredend muß die Lage des Schwerpunktes des letzteren gegeben sein.

Da $t^2 = \pi^2 \cdot \frac{J_o}{Mgs}$ ist, wird

$$J_o = \frac{t^2}{\pi^2} \cdot Mgs \text{ oder}$$

$$J_o = \frac{t^2}{\pi^2} \cdot \frac{P \cdot a}{\sin\alpha} \quad \ldots\ldots \quad (236)$$

In Fig. 193 ist ein physisches Pendel mit dem Aufhängepunkt C und dem Schwingungsmittelpunkt K dargestellt. Dann gilt

$$l = \frac{J_C}{M \cdot s} = \frac{J_S + Ms^2}{M \cdot s} = \frac{J_S}{M \cdot s} + s$$

Wird nun das Pendel in K aufgehängt, so werden $\overline{KS} = (l - s)$ und das statische Moment $M\,(l - s)$. Die reduzierte Pendellänge ergibt sich jetzt mit

$$l_1 = \frac{J_K}{M\,(l-s)} = \frac{J_S + M\,(l-s)^2}{M\,(l-s)} = \frac{J_S}{M\,(l-s)} + (l-s)$$

Aus obiger Beziehung für l folgt

$$l - s = \frac{J_S}{M \cdot s}, \text{ daher wird}$$

$$l_1 = \frac{J_S + M \cdot \left(\frac{J_S}{M \cdot s}\right)^2}{M \cdot \frac{J_S}{M \cdot s}} = s + \frac{J_S}{M \cdot s}, \text{ d. h.}$$

$$l_1 = l \quad \ldots\ldots\ldots \quad (237)$$

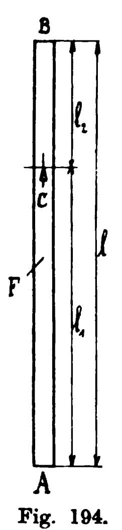


Fig. 194.

Die reduzierte Pendellänge ist dieselbe wie früher, also schwingt das Pendel in beiden Fällen gleich.

„Ein Pendel, bei welchem man Schwingungsmittelpunkt und Aufhängepunkt vertauschen kann, ohne daß sich die Schwingungsdauer ändert, heißt ein **Reversionspendel.**“

Beispiele.

235. Wo ist die Schwingungsachse eines 0,3 m langen, homogenen, prismatischen Stabes mit dem Querschnitte F anzubringen, damit seine Schwingungszeit eine halbe Sekunde betrage? Fig. 194.

Auflösung: Die Schwingungsachse sei C und der Stab hat dann in bezug auf C das Trägheitsmoment

$$Mk^2 = \frac{1}{3}(Fl_1\gamma)\cdot l_1^2 + \frac{1}{3}(Fl_2\gamma)l_2^2 = \frac{1}{3}F\gamma(l_1^3 + l_2^3)$$

k bedeutet die Entfernung des Schwerpunktes des Stabes von C; die Massen $kl_1\gamma$ und $Fl_2\gamma$ sind in A und B konzentriert gedacht, so daß ihre Trägheitsmomente in bezug auf C ... $\frac{1}{3}F\cdot l_1\gamma\cdot l_1^2$ und $\frac{1}{3}F\cdot l_2\gamma\cdot l_2^2$ werden.

Das statische Moment des Stabes ist

$$F\cdot l_1\gamma\cdot\frac{l_1}{2} - F\cdot l_2\cdot\gamma\cdot\frac{l_2}{2} = \frac{1}{2}F\cdot\gamma(l_1^2 - l_2^2)$$

Demnach wird die reduzierte Pendellänge

$$r = \frac{\frac{1}{3}\cdot F\gamma(l_1^3 + l_2^3)}{\frac{1}{2}F\gamma(l_1^2 - l_2^2)} = \frac{2}{3}\cdot\frac{l_1^2 - l_1 l_2 + l_2^2}{l_1 - l_2}$$

Die Differenz $l_1 - l_2$ sei gleich d.

$$l_1 + l_2 = l$$
$$l_1 - l_2 = d$$
$$l_1 = \frac{l+d}{2}$$
$$l_2 = \frac{l-d}{2}$$

$$r = \frac{2}{3}\cdot\frac{\left(\frac{l+d}{2}\right)^2 - \frac{l^2-d^2}{4} + \left(\frac{l-d}{2}\right)^2}{d} = \frac{2}{3}\cdot\frac{l^2+2ld+d^2-l^2+d^2+l^2-2ld+d^2}{4d}$$

$$r = \frac{2}{3}\cdot\frac{l^2+3d^2}{4d}$$

$$r = \frac{l^2+3d^2}{6d}$$

$$\frac{1}{2} = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}$$

$$\frac{1}{4} = \pi^2\frac{r}{g}$$

$$r = \frac{1}{4}\cdot\frac{g}{\pi^2} = 0{,}248 \text{ m}$$

$$0{,}248 = \frac{l^2+3d^2}{6d}$$

$$0{,}248 = \frac{0{,}09+3d^2}{6d}; \qquad 1{,}488d = 0{,}09 + 3d^2$$

$$d^2 - 0{,}496d + 0{,}03 = 0$$

$$d = 0{,}248 \pm \sqrt{0{,}248^2 - 0{,}03}$$

$$d = 0{,}248 \pm 0{,}177$$

Das Pluszeichen hat keinen Sinn, denn es würde $d > l$ sein; daher brauchbare Lösung
$$d = 0{,}071 \text{ m}$$

$$l_1 = \frac{l + d}{2} = \frac{0{,}03 + 0{,}071}{2} = \frac{0{,}371}{2}, \quad \text{d. h.} \quad \mathbf{l_1 = 0{,}186 \text{ m}}$$

$$l_2 = \frac{l - d}{2} = \frac{0{,}03 - 0{,}071}{2} = \frac{0{,}229}{2}, \quad \text{d. h.} \quad \mathbf{l_2 = 0{,}114 \text{ m}}$$

236. An einer $l = 0{,}4$ m langen und $G = 0{,}05$ kg schweren Stange ist eine Kugel mit dem Radius $r_1 = 0{,}04$ m und einem Gewichte $K = 2$ kg befestigt. Wie groß ist die Schwingungsdauer dieses Pendels, wenn es um das freie Ende der Stange schwingt? Fig. 195.

Auflösung:

$$r = \frac{\frac{1}{3} G l^2 + K \left[\frac{2}{5} r_1^2 + (l + r_1)^2\right]}{\frac{1}{2} G l + K (l + r_1)}$$

$$r = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}16 + 2 \left[0{,}44^2 + \frac{2}{5} \cdot 0{,}04^2\right]}{\frac{1}{2} \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}04 + 2 \cdot 0{,}44}$$

$$r = 0{,}4394 \text{ m}$$

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$$

$$t = 1{,}003 \cdot \sqrt{0{,}4394}$$

$$\mathbf{t = 0{,}665 \text{ Sek.}}$$

Fig. 195.

237. Wie groß ist die Schwingungsdauer einer rechteckigen Scheibe $a'b'c'd'$ mit der Höhe $\overline{a'b'}$ und Breite $\overline{a'c'}$, ferner der Masse m, wenn der Drehpunkt im Mittel der Seite $\overline{a'c'}$ liegt? Fig. 196.

Auflösung:
$$J_1 = \frac{m}{12} b^2, \quad J_2 = \frac{m}{12} h^2$$

$$J_p = \frac{m}{12} d^2$$

$$J = J_p + m \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{m}{12} d^2 + m \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$r = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{Statisches Moment}}$$

$$r = \frac{\frac{m}{12} d^2 + m \frac{h^2}{4}}{m \cdot \frac{h}{2}} = \frac{m d^2 + 3 m h^2}{6 m h}$$

$$r = \frac{d^2 + 3 h^2}{6 h}$$

$$\mathbf{t = \pi \sqrt{\frac{d^2 + 3 h^2}{6 g h}}}$$

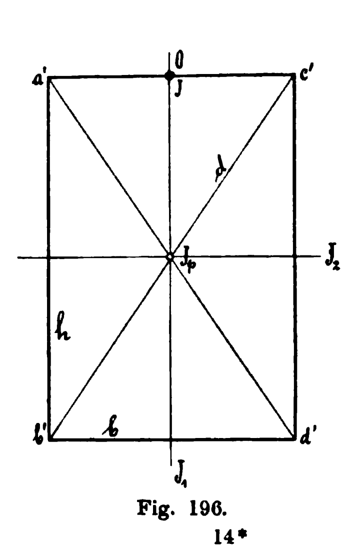


Fig. 196.

238. Durch eine Kugel mit dem Radius ϱ ist in der Entfernung d vom Mittelpunkt eine Achse gesteckt. Wie groß ist die Schwingungsdauer dieser Kugel?

Auflösung:

$$t = \pi \sqrt{\frac{\frac{2}{5} m\varrho^2 + m d^2}{mgd}}$$

$$t = \pi \sqrt{\frac{d^2 + \frac{2}{5}\varrho^2}{gd}}$$

§ 62. Zentrifugalkraft.

Wird ein Körper gezwungen, eine gleichförmige Bewegung im Kreise auszuführen, so ist dieselbe die Wirkung einer Kraft, der sogenannten **Zentripetalkraft.**

Das Bewegliche M hat das Bestreben, sich im Momente der Betrachtung infolge seiner Trägheit mit der Geschwindigkeit v in der Richtung $\overline{ME}$ fortzubewegen, Fig. 197, wird aber durch die Kraft C nach innen gezogen.

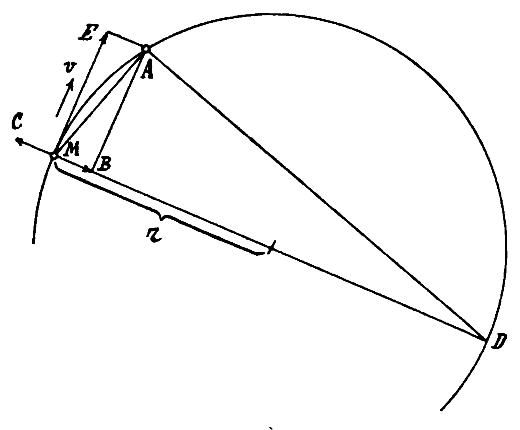


Fig. 197.

„Die Bewegung MA im Kreise kann also als Resultierende der Seitenbewegungen $\overline{ME}$ und $\overline{MB}$ aufgefaßt werden."

„Soll aber Gleichgewicht bestehen, so muß der nach innen gerichteten Kraft C eine entgegengesetzt gleichgroße C nach außen entgegenwirken. Letztere heißt **Flieh- oder Zentrifugalkraft.**"

„Die Zentripetalkraft bringt die Ablenkung des Beweglichen von der Geraden, die Zentrifugalkraft den Gleichgewichtszustand des Beweglichen hervor."

Noch deutlicher wird die Erklärung, wenn man das Bewegliche an das Ende eines Fadens von der Länge r anbringt und dasselbe um dessen anderes Ende rotieren läßt.

Das Bewegliche bewegt sich nun zwangsweise im Kreise, möchte sich stets tangential von demselben entfernen und bringt die Fadenspannung hervor. Die Zentripetalkraft ist also eine Aktion. Die Zentrifugalkraft, welche der letzteren das Gleichgewicht hält, ist eine Reaktion, denn sie verschwindet mit der Aktion. Wird der Faden irgendwo durchschnitten, so hören Aktion und Reaktion auf, denn M bewegt sich vermöge der Trägheit in der Tangente an dem Kreis weiter.

Die Beschleunigung, welche C dem Beweglichen erteilt, wird p, **Zentripetalbeschleunigung,** genannt.

In der unendlich kleinen Zeit τ wird der Weg von M nach innen

$$\overline{MB} = \frac{p}{2}\tau^2$$

Der Weg $\overline{ME}$ in der Zeit τ ist

$$\overline{ME} = v \cdot \tau$$

Statt des Bogens MA kann die Sehne $\overline{MA}$ gesetzt werden, und man erhält

$$\overline{MA}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{BA}^2$$

$$\overline{MA}^2 = \left(\frac{p}{2}\tau^2\right)^2 + (v \cdot \tau)^2$$

$\overline{MA}$ ist die Seite des rechtwinkligen Dreieckes MAD, so daß folgt

$$\overline{MA}^2 = \overline{MB} \cdot \overline{MD}, \text{ somit}$$

$$\left(\frac{p}{2}\tau^2\right)^2 + (v \cdot \tau)^2 = \overline{MB} \cdot \overline{MD}$$

$$\frac{p^2}{4}\tau^4 + v^2 \cdot \tau^2 = \frac{p}{2}\tau^2 \cdot 2r$$

Da τ unendlich klein ist, kann das Glied $\frac{p^2}{4} \cdot \tau^4$ vernachlässigt werden und ergibt sich

$$v^2 \cdot \tau^2 = p \cdot \tau^2 \cdot r \text{ oder}$$

$$p = \frac{v^2}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (238)$$

„Die Größe der Zentrifugalbeschleunigung ist also das Verhältnis aus dem Quadrate der Geschwindigkeit im Kreise und dem Radius desselben.“

Die Zentripetal-, bzw. Zentrifugalkraft, selbst wird

$$C = \frac{mv^2}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (239\,a)$$

Da $v = r\omega$ ist, läßt sich auch schreiben

$$C = mr\omega^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (239\,b)$$

„Die Größe der Fliehkraft ist direkt proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit im Kreise und direkt proportional der Entfernung des Beweglichen vom Zentrum.“

Wird die Umlaufszeit T eingeführt, so ist wegen

$$v \cdot T = 2r\pi$$

$$v = \frac{2r\pi}{T} \text{ und}$$

$$C = \frac{m \cdot \frac{4r^2\pi^2}{T^2}}{r} \text{ oder}$$

$$C = \frac{4\pi^2 \cdot m \cdot r}{T^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (239\,c)$$

Beispiele.

239. Welche Geschwindigkeit muß ein 6 kg schwerer Körper besitzen, damit er von einer ihn anziehenden Kraft $P = 30$ kg den Abstand $r = 2$ m behält?

Auflösung:
$$P = M \cdot \frac{v^2}{r} = \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{r}$$
$$v = \sqrt{\frac{30 \cdot 9{,}81 \cdot 2}{6}} = \sqrt{98{,}1}$$
$$v = 9{,}91 \text{ m}$$

240. Wie groß muß laut Fig. 198 der Achsabstand x sein, damit die Drehungsachse nicht beansprucht werde?

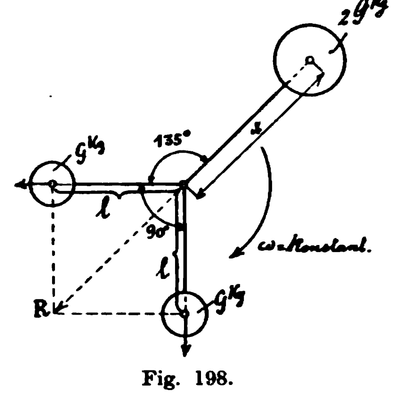


Fig. 198.

Auflösung: Die Resultierende der Zentrifugalkräfte der Kugeln im Achsabstande l muß gleich sein der Zentrifugalkraft im Achsabstande x.

$$\sqrt{\left(\frac{G}{g} l\omega^2\right)^2 + \left(\frac{G}{g} l\omega^2\right)^2} = \frac{2G}{g} \cdot x \cdot \omega^2$$
$$\frac{G}{g} l\,\omega^2 \cdot \sqrt{2} = \frac{2G}{g} x\omega^2$$
$$l\sqrt{2} = 2x$$
$$x = \frac{l}{2}\sqrt{2}$$

241. Wie groß muß die Neigung eines Reiters in einer kreisförmigen Reitbahn von 10 m Durchmesser bei einer Geschwindigkeit von $v = 4$ m sein?

Auflösung: Die Resultierende aus dem Gewichte des Reiters und aus der Fliehkraft muß in die Achsrichtung des Reiters fallen. Heißt der Winkel, den Reitergewicht und Resultierende bilden, α, dann ergibt sich

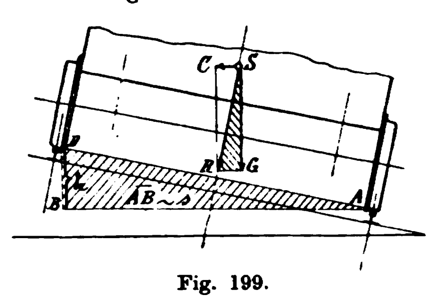


Fig. 199.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{C}{G} = \frac{M \cdot \frac{v^2}{r}}{G} = \frac{M v^2}{r \cdot M g}$$
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v^2}{g r}$$
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{16}{9{,}81 \cdot 5} = 0{,}326$$
$$\alpha \sim 18^0$$

242. Um wieviel muß in der Krümmung mit dem Radius r die äußere Schiene eines Geleises über die innere erhöht werden, wenn an dieser Stelle höchstens mit der Geschwindigkeit v m/sek. gefahren werden darf und auf keinerlei Widerstände Rücksicht genommen wird? Fig. 199.

Auflösung: Das Gewicht des Wagens und die nach außen gerichtete Fliehkraft setzen sich zu einer Resultierenden R zusammen, welche senkrecht zur Tangentialebene an die Schienenköpfe liegen muß. Aus der Ähnlichkeit

der schraffierten Dreiecke ergibt sich, da statt der Spurweite $\overline{AD}$ annähernd deren Horizontalprojektion $\overline{AB}$ gesetzt werden kann,

$$h : s = C : G$$

$$h : s = \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{r} : G$$

$$h = \frac{v^2 \cdot s}{g r}$$

243. Um wievielmal müßte sich die Erde schneller drehen, damit ihre Anziehungskraft am Äquator durch die Fliehkraft aufgehoben werde? Erdradius $r = 6\,370\,000$ m, Umlaufszeit der Erde $23^h\ 56'\ 4'' = 86\,154''$.

Auflösung: Die gesuchte Geschwindigkeit heiße v_1. — Dann gilt

$$\frac{m\,v_1^2}{r} = G$$

$$v_1^2 = g\,r$$

$$v_1 = \sqrt{g r}$$

Die Umfangsgeschwindigkeit am Äquator ist

$$v = \frac{2\,r\,\pi}{86\,154}$$

Demnach wird

$$\frac{v_1}{v} = \frac{g\,r}{\frac{2\,r\,\pi}{86\,154}} = \frac{86\,154}{2\,\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{r}}$$

$$\sqrt{\frac{g}{r}} = \sqrt{\frac{9{,}81}{6\,370\,000}} = \sqrt{0{,}000\,001\,54}$$

$$\frac{v_1}{v} = \frac{86\,154}{2\,\pi} \cdot 0{,}001\,24$$

$$v_1 \sim 17\,v,$$

d. h. die Erde müßte sich 17mal schneller drehen.

244. Wie groß sind Umfangsgeschwindigkeit v und Umlaufszeit t des in Fig. 200 gezeichneten **Kegel- oder Zentrifugalpendels** mit der Länge l (l beschreibt einen Kegelmantel), wenn seine Elongation α ist? Wie groß ist ferner die Tourenzahl des Kegelpendels?

Auflösung: Das Gewicht G zerlegt sich in 2 Komponenten; die eine $\overline{SB}$ spannt den Faden, die andere $\overline{SA} = G \cdot \operatorname{tg} \alpha$ hält der Fliehkraft C das Gleichgewicht. Die Bedingung für letzteres lautet daher

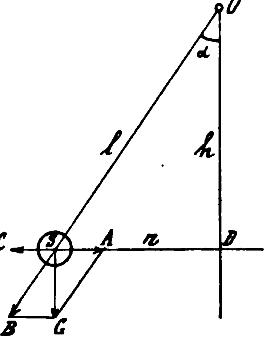


Fig. 200.

$$G \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{g r \cdot \operatorname{tg} \alpha} \quad \ldots \quad (240)$$

r kann ausgedrückt werden durch $l \cdot \sin\alpha$

$$2 r \pi = \sqrt{g r \operatorname{tg}\alpha} \cdot t$$

$$t = \frac{2 r \pi}{\sqrt{g r \cdot \operatorname{tg}\alpha}} = \frac{2 \pi \cdot \sqrt{r}}{g \cdot \sqrt{\frac{r}{h}}}$$

$$t = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \cdot \sqrt{h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (241)$$

$h = l \cos\alpha$ heißt **Pendelhöhe.** Wird dieselbe 4mal so groß, so dauert ein Umlauf des Kegelpendels 2mal so lange.

$$v^2 = g r \cdot \operatorname{tg}\alpha = g \cdot r \cdot \frac{r}{h} = \frac{\pi r^2 n^2}{30^2}$$

$$n = \frac{30}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{h}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (242)$$

§ 63. Beschleunigungsdruck.

Um die hin und her gehenden Teile einer Dampfmaschine (Kolben, Kolbenstange, Kreuzkopf usw.) in Bewegung zu setzen, bzw. zu beschleunigen, ist eine gewisse Kraft nötig, welche dem totalen Dampfdruck entnommen wird, so daß nur jener Druck arbeitsleistend ins Gestänge geleitet wird, der nach Abzug dieses sogenannten **Beschleunigungsdruckes** vom Dampfdruck übrigbleibt. Da in der zweiten Hälfte des Kolbenhubes der Zwang der Kurbelbewegung die Massen verzögert, werden letztere jene Arbeit, die sie früher ansammelten, jetzt an die Kurbel abgeben, und zum bestehenden Dampfdrucke addiert sich noch der Druck der verzögerten Massen.

So wird bei jedem Kolbenhube wohl die ganze Arbeit des Dampfes auf die Kurbel übertragen, indes nicht im Maße der Wirkung auf den Kolben, sondern nach einem durch die bewegten Massen beeinflußten Gesetze.

a) Die Schubstange sei unendlich lang.

Man denke sich alle hin und her gehenden Teile einer Dampfmaschine im Kurbelzapfen vereinigt und mit der Kurbel rotierend, Fig. 201. — Diese ideale Masse würde infolge der Trägheit sich in jedem Augenblicke in der Tangente vom Kreise entfernen wollen, wenn sie nicht durch einen radial einwärts gerichteten Widerstand, die Zentripetalkraft F, daran gehindert werden würde. In der Zeit, während die Kurbel von der Totlage aus den Winkel α durchläuft, gelangt die Masse von A nach B; sie hat dann im Sinne der Horizontalen den Weg $s = R(1 - \cos\alpha)$ zurückgelegt. Ihre Geschwindigkeit in tangentialer Richtung ist v, in horizontaler $c = v \cdot \sin\alpha$.

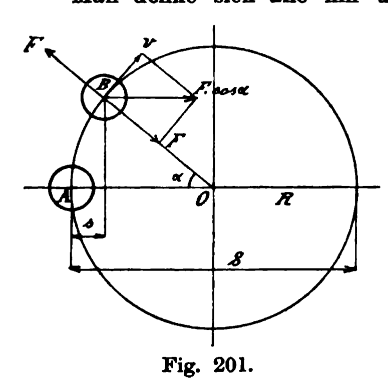


Fig. 201.

Nun ist in Wirklichkeit die Masse nicht im Kurbelzapfen angehäuft, sondern in Kolben, Kolbenstange, Kreuzkopf usw. verteilt. Da diese Massen

nun nicht vom Kurbelzapfen mitgeschleppt werden, sondern im Gegenteil einen Druck auf ihn übertragen sollen, muß ein Teil des Dampfdruckes, der auf der arbeitenden Kolbenseite wirkt, zur Beschleunigung der hin und her gehenden Massen verwendet werden, vermöge welcher er die Kurbel treibend folgt; d. h. während der Zeit, in der die Kurbel den Winkel a durcheilt, hat der Kolben den Weg $s = R(1 - \cos a)$ durch den Dampfdruck geführt zu werden und muß bis dahin die Geschwindigkeit $c = v \cdot \sin a$ erlangt haben.

Wenn aber zwei Massen durch zwei Kräfte in gleichen Zeiten, von gleichen Anfangsgeschwindigkeiten 0 aus, nach gleichen Gesetzen bewegt werden, so sind die bewegenden Kräfte selbst einander gleich. Es ist somit der Beschleunigungsdruck

$$Q = F \cdot \cos a$$

Ist $\frac{P}{g}$ die Masse der hin und her gehenden Teile, so ist

$$F = \frac{P}{g} \cdot \frac{v^2}{R} = \frac{P}{g} \cdot \left(\frac{2 R \pi n}{60}\right)^2 \cdot \frac{1}{R} = \frac{P}{g} \cdot \left(\frac{S n}{30}\right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{4 R} = \frac{P}{g} c^2 \cdot \frac{\pi^2}{2 S}$$

$$F = \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{P}{g} \cdot \frac{c^2}{S}$$

und somit

$$Q = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{g} \cdot P \cdot \frac{c^2}{S} \cos \alpha \quad \text{oder}$$

$$Q = \frac{1}{2} \cdot P \cdot \frac{c^2}{S} \cos \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (243\text{a})$$

dagegen pro Flächeneinheit des Kolbens

$$q = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{g} \cdot \frac{P}{f} \cdot \frac{c^2}{S} \cos \alpha \quad \text{oder}$$

$$q = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{f} \cdot \frac{c^2}{S} \cdot \cos \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (243\text{b})$$

wenn der Querschnitt des Kolbens f qcm beträgt.

Hiermit ist die Abhängigkeit des Druckes q von α gezeigt.

Es soll nun der Zusammenhang zwischen q und dem zugehörigen Kolbenweg gesucht werden.

Allgemein ist $s = R(1 - \cos \alpha)$, d. h.

$$\cos \alpha = \frac{R - s}{R} = 1 - \frac{s}{R}, \text{ also}$$

$$q = \frac{F}{f}\left(1 - \frac{s}{R}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (244)$$

Werden die Größen von s als Abszissen und die von q als Ordinaten und zwar wegen späterer Kombination des Beschleunigungsdruck-Diagrammes mit dem Indikatordiagramm die positiven nach abwärts und die negativen nach aufwärts aufgetragen, so ist die Kurve der Beschleunigungsdrücke eine Gerade, Fig. 202.

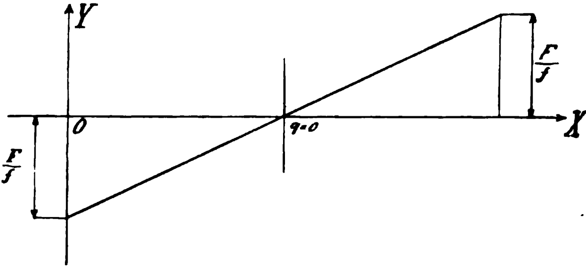


Fig. 202.

$$\text{Für } s = 0 \ldots\ldots q = \frac{F}{f}\left(1 - \frac{0}{R}\right) = \frac{F}{f}$$

$$\text{für } s = \frac{S}{2} \ldots\ldots q = \frac{F}{f}\left(1 - \frac{\frac{S}{2}}{\frac{S}{2}}\right) = 0$$

$$\text{für } s = S \ldots\ldots q = \frac{F}{f}\left(1 - \frac{S}{\frac{S}{2}}\right) = \frac{F}{f}(1-2) = -\frac{F}{f}$$

Die Fläche, welche zwischen Beschleunigungsdruckkurve und der Achse $\overline{OX}$ liegt, stellt die Arbeit des Beschleunigungsdruckes dar.

b) Die Schubstange sei endlich lang.

Bei endlich langer Schubstange ist die Kolbenbeschleunigung laut (26)

$$p = \frac{v^2}{R}\left(\cos\alpha \pm \frac{R}{L}\cos 2\alpha\right)$$

Daher wird der Beschleunigungsdruck

$$Q = M\frac{v^2}{R}\left(\cos\alpha \pm \frac{R}{L}\cos 2\alpha\right),$$

wenn $M = \frac{P}{g}$ die Masse aller hin und her gehenden Teile bedeutet. Nun ist $\frac{M v^2}{R} = F$ — F war aber gleich $\frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{P}{g}\cdot\frac{c^2}{S} \sim \frac{1}{2}\cdot P\cdot\frac{c^2}{S}\cdot$ Somit wird der Beschleunigungsdruck pro 1 qcm Kolbenfläche

$$q = \frac{F}{f}\left(\cos \pm \frac{R}{L}\cos 2\alpha\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{P}{f}\cdot\frac{c^2}{S}\left(\cos\alpha \pm \frac{R}{L}\cos 2\alpha\right) \qquad (245)$$

$\frac{P}{f}$, das auf 1 qcm entfallende Gewicht der hin und her gehenden Teile einer Dampfmaschine, wird nach Radinger

bei Stabilmasch.	Im Hochdruckzyl.	bei $S \lesseqgtr 0{,}7$ m . . .	0,28 kg*)
		bei $S \gtreqless 0{,}7$ m . . .	0,4 kg
	Im Niederdruckzyl.	bei $S \lesseqgtr 0{,}9$ m . . .	0,2 kg
		bei $S > 0{,}9$ m . . .	0,22 kg
bei Lokomotiven	ohne Kuppelstangen		0,33 kg
	mit Kuppelstangen		0,45 ÷ 0,55 kg
bei Schiffsmasch.	Im Hochdruckzylinder		0,45 kg
	Im Mitteldruckzylinder		0,20 kg
	Im Niederdruckzylinder		0,15 kg

*) Bei Einzylinder-Kondensations-Maschinen 0,33.

Beispiel.

245. Die Konstruktion der Beschleunigungsdruckkurve bei Vorhandensein einer endlich langen Schubstange und bei $\frac{R}{L} = \frac{1}{5}$ anzugeben. Spezielle Durchführung für eine Maschine, deren Zylinder 450 mm Durchmesser und 600 mm Hub besitzt, und deren Tourenzahl $n = 200$ ist. Fig. 203.

Auflösung: Für $\alpha = 0$ wird

$$q_{\alpha=0} = q_1 = \frac{F}{f}\left(\cos o^0 + \frac{1}{5}\cos o^0\right) = \frac{F}{f}\left(1 + \frac{1}{5}\right)$$

$$q_1 = \frac{6}{5}\cdot\frac{F}{f} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (246)$$

„Der Beschleunigungsdruck am Anfange des Kolbenhinganges ist bei endlich langer Schubstange $\frac{6}{5}$ desjenigen bei unendlich langer.“

$\frac{1}{5}\cdot\frac{F}{f}$ werde gleich m gesetzt.

Die Konstruktion des Punktes I ist aus Fig. 203 ersichtlich. Speziell wird

$$c = \frac{n\,S}{30} = \frac{200\cdot 0{,}6}{30} \doteq 4 \text{ m}$$

$$\frac{F}{f} = \frac{1}{2}\cdot 0{,}28\cdot\frac{16}{0{,}6} = 0{,}93\cdot 4 = 3{,}72 \text{ kg/qcm}$$

$$q_1 = \frac{6}{5}\cdot\frac{F}{f} = 4{,}46 \text{ kg/qcm}$$

Für $\alpha = 180^0 = \pi$ ergibt sich

$$q_{\alpha=\pi} = q_2 = \frac{F}{f}\left(\cos\pi + \frac{1}{5}\cos 2\pi\right) = \frac{F}{f}\left(-1 + \frac{1}{5}\right)$$

$$q_2 = -\frac{4}{5}\cdot\frac{F}{f} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (247)$$

„Zu Beginn des Kolbenrückganges ist der Beschleunigungsdruck bei endlich langer Schubstange $\frac{4}{5}$ desjenigen bei unendlich langer.“

Behufs Konstruktion des Punktes II siehe Fig. 203.

Speziell ist $$q_2 = -\frac{4}{5}\cdot 3{,}72$$

$$q_2 = -2{,}97 \text{ kg/qcm}$$

Für $\alpha = 45^0$ wird bei unendlich langer Schubstange

$$q'_{\alpha=45^0} = q_3' = \frac{F}{f}\cos 45^0$$

und bei endlich langer

$$q_{\alpha=45^0} = q_3 = \frac{F}{f}\left(\cos 45^0 + \frac{1}{5}\cos 90^0\right) \text{ oder}$$

$$q_3 = \frac{F}{f}\cos 45^0 = q_3' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (248)$$

d. h. „Die Beschleunigungsdrücke beim Kurbeldrehungswinkel $\alpha = 45^0$ sind für unendlich große und endlich große Schubstange einander gleich."

Wird $\alpha = 135^0$, dann gilt für unendlich lange Schubstange

$$q_{\alpha = 135^0} = q_4' = \frac{F}{f} \cos 135^0 = - \frac{F}{f} \cos 45^0$$

und bei endlich langer

$$q_{\alpha = 135^0} = q_4 = \frac{F}{f} (\cos 135^0 + \frac{1}{5} \cos 270^0)$$

$$\mathbf{q_4 = - \frac{F}{f} \cdot \cos 45^0 = q_4'} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{(249)}$$

d. h. „Beim Kurbeldrehungswinkel 135° sind ebenfalls die Beschleunigungsdrücke für unendlich große und endlich große Schubstange einander gleich."

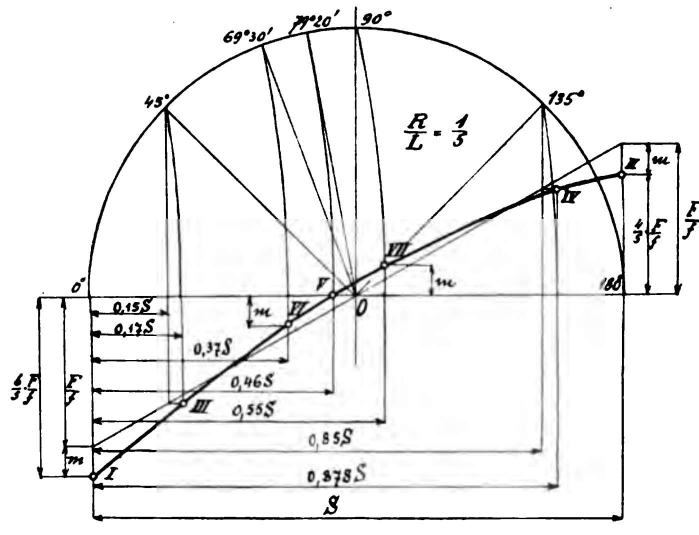


Fig. 203.

Speziell ergeben sich für q_3 und q_4

$$q_3 = 3{,}72 \cdot \cos 45^0$$
$$\mathbf{q_3 = 2{,}64\ kg/qcm}$$
$$q_4 = - 3{,}72 \cos 45^0$$
$$\mathbf{q_4 = - 2{,}64\ kg/qcm}$$

Die Konstruktionen für die Punkte III und IV sind aus Fig. 203 zu ersehen.

Es werde weiter gefragt, wann der Beschleunigungsdruck Null wird.

$$q = \frac{F}{f} (\cos \alpha + \frac{1}{5} \cos 2\,\alpha) \text{ wird Null, wenn}$$

der Klammerausdruck Null ist. Der hierzu entsprechende Wert von α ist laut Beispiel 33

$$\alpha = 79^0\,20'$$

$$\mathbf{q_{\alpha = 79^0\,20'} = q_5 = 0} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{(250)}$$

In Fig. 203 ist die Konstruktion des Punktes V gezeigt.

Der Beschleunigungsdruck kann auch $m = \frac{1}{5} \cdot \frac{F}{f}$ werden. Hierfür lautet die Bedingung

$$q_6 = \frac{F}{f}\left(\cos\alpha + \frac{1}{5}\cdot\cos 2\alpha\right) = \frac{1}{5}\cdot\frac{F}{f}$$

$$\cos\alpha + \frac{1}{5}\cdot\cos 2\alpha = \frac{1}{5}$$

$$5\cos\alpha + \cos 2\alpha = 1$$

$$5\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = 1$$

$$\cos^2\alpha + \frac{5}{2}\cos\alpha - 1 = 0$$

$$\alpha \sim 69^0\,30'$$

$$q_{\alpha = 69^0\,30'} = q_6 = \frac{1}{5}\cdot\frac{F}{f} = m \;\ldots\ldots\ldots \quad (251)$$

Die Ordinate des Punktes VI, Fig. 203, ist q_6.

Ein weiterer charakteristischer Punkt der Beschleunigungsdruckkurve, nämlich VII, Fig. 203, wird erhalten, wenn man q für $\alpha = 90^0$ als Ordinate aufträgt. Für diesen Wert von α wird

$$q_{\alpha = 90^0} = q_7 = \frac{F}{f}\left(\cos 90 + \frac{1}{5}\cos 180\right) = \frac{F}{f}\left(0 - \frac{1}{5}\right)$$

$$q_{\alpha = 90^0} = q_7 = -\frac{1}{5}\cdot\frac{F}{f} = -m \;\ldots\ldots\ldots \quad (252)$$

für $\alpha =$	0^0	45^0	$69^0\,30'$	$79^0\,20'$	90^0	135^0	180^0
ist $s_{L=\infty} =$	0	0,15 S	—	—	0,5 S	0,85 S	S
ist $s_{L=5R} =$	0	0,17 S	0,37 S	0,46 S	0,55 S	0,878 S	S

§ 64. Schwungradberechnung.

Bedeutet p den auf den Kolben wirkenden Dampfdruck und q den Beschleunigungsdruck, so wird der Differenzdruck $(p - q)$ Arbeit am Kurbelzapfen leisten.

a) Bei unendlich langer Schubstange.

Die arbeitsleistende Komponente von $(p - q)$ ist $t = (p - q)\sin\alpha$, Fig. 204, wenn α der Kurbeldrehungswinkel, der diesem Drucke entspricht, ist.

Nun ist $\triangle MNE \sim \triangle MmO$, so daß sich ergibt

$$(p - q) : t = R : \overline{Mm}$$

$$(p - q) : t = R : \overline{OC}$$

$$(p - q) : t = \overline{AO} : \overline{OC}$$

Wird $\overline{AD} = (p - q)$ gemacht und in D eine Senkrechte auf $\overline{AO}$ errichtet, so ist

$$DF = t \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (253)$$

t heißt der **Tangentialdruck am Kurbelzapfen.**

b) Bei endlich langer Schubstange.

In Fig. 205 ist gezeigt, wie sich der arbeitsleistende Druck am Kreuzkopf in eine in die Schubstange fallende Komponente $\frac{p-q}{\cos\omega}$ und in die senkrecht

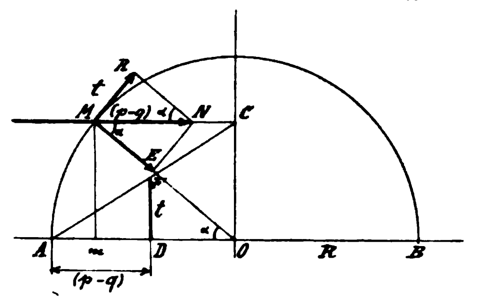


Fig. 204.

zur Führungsbahn des Kreuzkopfes gerichtete *K* zerlegt, ferner wie $\frac{p-q}{\cos\omega}$ am Kurbelzapfen in eine radiale Komponente und in den Tangentialdruck *t* zerlegt wird.

Verlängert man $\overline{OM}$ und trägt man $\overline{MS} = (p-q)$ auf, so ist $\overline{ST}$ (nach Riedler) der Tangentialdruck. Diese Konstruktion ist einfach, da keine Kräftezerlegungen am Kreuzkopf und am Kurbelzapfen ihr vorhergehen müssen.

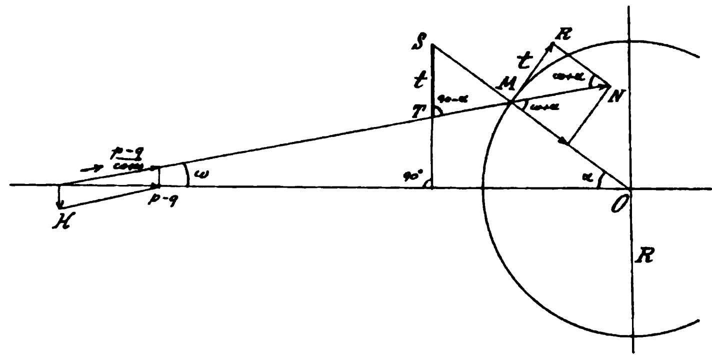


Fig. 205.

Nun soll die Richtigkeit dieser Konstruktion bewiesen werden.

Aus dem Dreiecke *MNR* folgt die Beziehung

$$\frac{p-q}{\cos\omega} : t = \sin 90^0 : \sin(\alpha+\omega)$$

$$\frac{p-q}{t} = \frac{\cos\omega}{\sin(\alpha+\omega)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(a)}$$

Aus dem Dreiecke *MST* ergibt sich

$$\frac{p-q}{x} = \frac{\sin(90-\omega)}{\sin(\alpha+\omega)} \text{ oder}$$

$$\frac{p-q}{x} = \frac{\cos\omega}{\sin(\alpha+\omega)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(b)}$$

Durch Vergleichung von (a) und (b) erhält man

$$x = t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (254),$$

was zu beweisen war.

Radinger hat die Konstruktion des Beschleunigungsdruckes folgendermaßen durchgeführt.

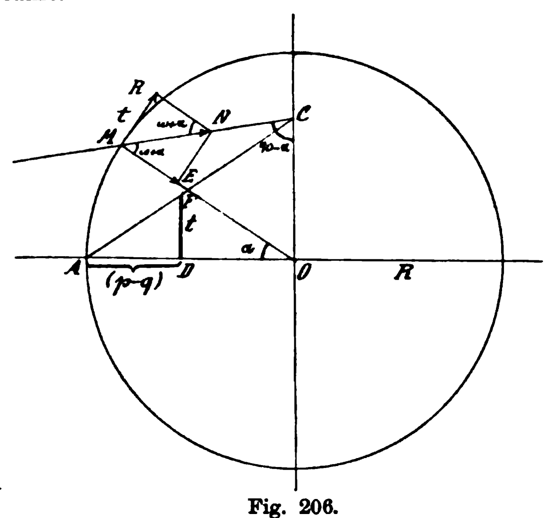


Fig. 206.

Die Schubstangenrichtung wird, Fig. 206, bis C verlängert, dann wird $\overline{AC}$ gezogen, $\overline{AD} = (p - q)$ aufgetragen und in D eine Senkrechte auf $\overline{AO}$ errichtet. $\overline{DF}$ ist dann gleich t.

Beweis: Aus Dreieck MNR folgt

$$\frac{t}{\frac{p-q}{\cos\omega}} = \frac{\sin(\alpha + \omega)}{\sin 90^0}$$

$$\frac{t}{p-q} = \frac{\sin(\alpha + \omega)}{\cos\omega}$$

Aus Dreieck MOC wird

$$\overline{OC} : R = \sin(\alpha + \omega) : \sin(90 - \omega)$$

$$\overline{OC} : R = \sin(\alpha + \omega) : \cos\omega$$

Daher $$\frac{\overline{OC}}{R} = \frac{\sin(\alpha + \omega)}{\cos\omega} = \frac{t}{p-q}$$

Da $$\frac{\overline{OC}}{R} = \frac{\overline{OC}}{\overline{AO}}$$ ist, folgt

$$\frac{t}{p-q} = \frac{\overline{OC}}{\overline{AO}},$$ also

$$t = \overline{DF} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 255)$$

Trägt man den Kurbelkreisumfang auf einer Geraden ab und in den einzelnen Punkten desselben die zugehörigen, wechselnd großen Tangential-

drücke, Fig. 207, so ergibt der geometrische Ort der letzteren die Linie der Tangentialdrücke. Diese Darstellung heißt das **Tangentialdruckdiagramm.**

Nach dem Kurbelzapfenwege s sei der Tangentialdruck t. — Während der in der folgenden, unendlich kleinen Zeit τ und während des ihr entsprechenden Weges σ ändert sich t nicht. Die Arbeit am Kurbelzapfen ist dann $t \cdot \sigma$. — Da nun die zwischen den unendlich nahe verzeichneten Drücken

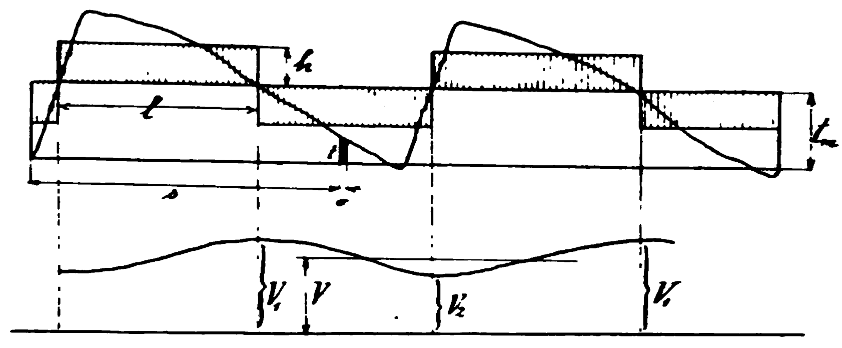


Fig. 207.

schraffierte Fläche auch $t \cdot \sigma$ ist, folgt, daß sie die Arbeit des Tangentialdruckes t während des Weges σ darstellt.

Denkt man sich nun die ganze Fläche des Tangentialdruckdiagrammes durch Addition lauter solcher unendlich kleiner Flächen $t \cdot \sigma$ zustande gekommen, so läßt sich sagen:

„Die Fläche des Tangentialdruckdiagrammes gibt die von den Tangentialdrücken am Kurbelzapfen geleistete Arbeit an."

Verwandelt man die Fläche des Tangentialdruckdiagrammes in ein inhaltsgleiches Rechteck mit derselben Basis, dann stellt die Höhe desselben den mittleren Tangentialdruck am Kurbelzapfen dar.

Die größeren Drücke t leisten eine größere als die mittlere nötige Arbeit. Solange dies geschieht, nimmt der Schwungradkranz mehr Arbeit auf und seine Umfangsgeschwindigkeit V wächst. Wird der Tangentialdruck dagegen kleiner als der mittlere nötige, dann wird die Umfangsgeschwindigkeit V des Schwungradkranzes abnehmen.

Das Schwungrad macht also keine genau gleichförmige Bewegung.

Bei unendlich langer Schubstange folgen sich vollständig gleiche Mehr- und Minderarbeitsbeträge, d. h. die die mittlere Tangentialdrucklinie überschneidenden und unterschneidenden Flächen sind einander gleich. Bei endlich langer Schubstange verschiebt sich aber diese Gleichheit und muß eine volle Kurbelumdrehung in Betracht gezogen werden, da dann die überschneidenden Flächen zusammen der Summe der unterschneidenden gleich sind.

Die größte der über- oder unterschneidenden Flächen $l \cdot h$ werde folgender Betrachtung zugrunde gelegt.

$l^{\text{Meter}} \cdot h^{\text{kg}} = a^{\text{kgm}}$ stellt die über die nötige mittlere Arbeit am Kurbelzapfen geleistete Mehrarbeit pro 1 qcm Kolbenfläche vor. Demnach ist die totale Mehrarbeit

$$A = f \cdot a = h \cdot l \cdot a$$

Während der Aufnahme dieser Arbeit hat sich die Energie des Schwungradkranzes um

$$A = \frac{G}{2g} V_1^2 - \frac{G}{2g} V_2^2 = \frac{G}{2g}(V_1^2 - V_2^2)$$

vergrößert. Nun ist auch

$$A = \frac{G}{2g}(V_1 + V_2) \cdot (V_1 - V_2) \text{ oder}$$

$$A = \frac{G}{g} \cdot \frac{V_1 + V_2}{2} \cdot \frac{V_1 - V_2}{V} \cdot V$$

„Das Verhältnis aus der Differenz aus größter und kleinster Umfangsgeschwindigkeit des Schwungrades und der mittleren heißt der **Ungleichförmigkeitsgrad** δ."

Ist z. B. $V_1 = 20{,}1$ m/sek., $V_2 = 19{,}9$ m/sek. und $V = 20$ m/sek., so wird

$$\delta = \frac{20{,}1 - 19{,}9}{20} \sim 0{,}01$$

Da $\frac{V_1 + V_2}{2} = V$ ist, ergibt sich

$$A = \frac{G}{g} \cdot \delta \cdot V^2 \text{ und daraus}$$

$$G = A \cdot \frac{g}{\delta \cdot V^2}$$

Da auch die Schwungradarme arbeitsübertragend wirken, genügt es zu nehmen

$$\mathbf{G = 0{,}9\, A \cdot \frac{g}{\delta \cdot V^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(256)}$$

§ 65. Stoß fester Körper.

Stoß heißt das Aufeinandertreffen und die Wechselwirkung zweier Körper. **Stoßlinie** oder **Stoßrichtung** ist die Normale zur gemeinschaftlichen Tangentialebene im Berührungspunkte beider Körper. Fig. 208.

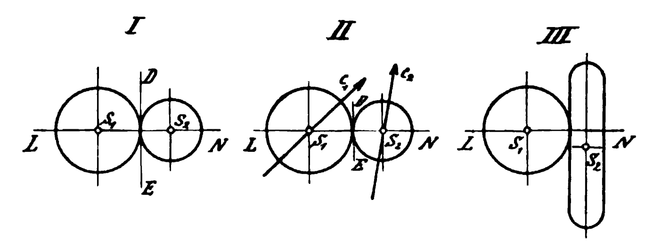


Fig. 208.

Man unterscheidet:

a) nach Lage der Stoßlinie:

α) **zentrischen (zentralen) Stoß,** wenn diese durch den Schwerpunkt beider Körper hindurchgeht (I),

β) **exzentrischen Stoß,** wenn dies nicht der Fall ist (III);

b) nach Lage von Stoß- und Bewegungsrichtung:

α) **gerader Stoß**, wenn beide Richtungen zusammenfallen (I),

β) **schiefer Stoß** (II), wenn dies nicht zutrifft;

c) nach der Dauer der Stoßperioden.

In der ersten Stoßperiode werden die Körper an den Berührungsstellen eingedrückt, in der zweiten dehnen sie sich wieder aus und zwar ganz, teilweise oder gar nicht.

α) Ist die zweite Periode das vollkommene Spiegelbild der ersten, so ist der Stoß **vollkommen elastisch.**

β) Wenn die Körper die Deformationen durch den Stoß teilweise beibehalten, so heißt der Stoß **unvollkommen elastisch.**

γ) Behalten die Körper die Deformationen durch den Stoß ganz, so heißt derselbe **vollkommen unelastisch.**

1. Der Satz von der Erhaltung der Bewegungsgröße.

Zwei Kugeln, Fig. 209, bewegen sich nach derselben Richtung und zwar mit ungleich großen Geschwindigkeiten. Ist diejenige der ersten Kugel größer als die der zweiten, so holt jene diese ein, und es findet Stoß statt. Die erste Kugel drückt auf die zweite, die einen ebenso großen Gegendruck erzeugt. Druck und Gegendruck wachsen vom Anfange an. Der Druck der ersten Kugel beschleunigt die zweite Kugel, und umgekehrt verzögert der Gegendruck der zweiten Kugel die Bewegung der ersten. Die Geschwindigkeiten nach dem Stoße seien v_1 und v_2.

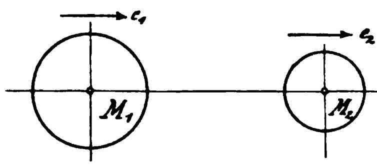


Fig. 209.

Um die Kräftewirkung während der ersten Stoßperiode zu untersuchen, zerlege man dieselbe in unendlich viele Zeitteilchen, innerhalb welcher Drücke und Gegendrücke je von konstanter Größe gedacht werden dürfen.

Die Änderung der Bewegungsgröße einer Masse M bei Vergrößerung ihrer Geschwindigkeit von c auf v in der Zeit t ist

$$P \cdot t = M\,(v - c)$$

In einem unendlich kleinen Zeitteilchen τ sei der Druck auf die Masse M_2 der zweiten Kugel P, wodurch deren Geschwindigkeit von c'' auf v'' gesteigert wird. Es gilt dann

$$P \cdot \tau = M_2\,(v'' - c'')$$

In demselben Zeitteilchen bewirkt der Gegendruck $(-P)$ der zweiten Kugel, daß die Geschwindigkeit c' der ersten Kugel auf die Größe v' verringert wird, so daß sich ergibt

$$-P \cdot \tau = M_1\,(v' - c')$$

Da $(P \cdot \tau)$ und $(-P \cdot \tau)$ numerisch gleich, nur entgegengesetzt bezeichnet sind, so ist festgestellt, daß in jedem Zeitteilchen des Stoßes der eine Körper so viel an Bewegungsgröße gewinnt als der andere an solcher verliert. Was aber von einem Zeitteilchen gilt, gilt auch für alle anderen, so daß insgesamt wird

$$\text{Gewinn } [M_2\,(v_2 - c_2)] = \text{Verlust } [-M_1\,(v_1 - c_1)] \text{ oder}$$

$$\boldsymbol{M_1 v_1 + M_2 v_2 = M_1 c_1 + M_2 c_2} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{(257)}$$

„Die Summe der Bewegungsgrößen vor dem Stoße ist gleich der Summe derselben nach diesem, gleichgiltig, ob die Körper vollkommen oder unvollkommen elastisch oder vollkommen unelastisch sind.“

2. Der vollkommen unelastische Stoß.

Sind beide Körper vollkommen unelastisch, so spielt sich der Stoßvorgang nur in der ersten Periode ab, denn hierauf findet keine Wiederausdehnung mehr statt. Beide Körper verhalten sich nach dem Stoße wie ein einziger Körper, welcher sich mit der Geschwindigkeit $v_2 = v_1 = v$ weiterbewegt. Aus $v(M_1 + M_2) = M_1 c_1 + M_2 c_2$ folgt

$$v = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2} \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots (258)$$

3. Verlust an Arbeitsvermögen beim vollkommen unelastischen Stoß.

Das Arbeitsvermögen beider Kugeln vor dem Stoße ist

$$\frac{M_1 c_1^2}{2} + \frac{M_2 c_2^2}{2},$$

dagegen nach dem Stoße

$$(M_1 + M_2)\frac{v^2}{2}$$

Somit ist der Verlust an Arbeitsvermögen

$$L = M_1 \frac{c_1^2 - v^2}{2} + M_2 \frac{c_2^2 - v^2}{2}$$

$$L = \frac{M_1}{2}\left[c_1^2 - \left(\frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2}\right)^2\right] + \frac{M_2}{2}\cdot\left[\left(\frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2}\right)^2 - c_2^2\right]$$

$$L = \frac{M_1}{2}\cdot\frac{M_1^2 c_1^2 + 2M_1 M_2 c_1^2 + M_2^2 c_1^2 - M_1^2 c_1^2 - 2M_1 M_2 c_1 c_2 - M_2^2 c_2^2}{(M_1 + M_2)^2} +$$

$$+ \frac{M_2}{2}\cdot\frac{M_1^2 c_1^2 + 2M_1 M_2 c_1 c_2 + M_2^2 c_2^2 - M_1^2 c_2^2 - 2M_1 M_2 c_2^2 - M_2^2 c_2^2}{(M_1 + M_2)^2}$$

$$L = \frac{c_1^2(M_1 M_2^2 + M_2 M_1^2) - 2c_1 c_2(M_1^2 M_2 + M_1 M_2^2) + c_2^2(M_1^2 M_2 + M_1 M_2^2)}{2(M_1 + M_2)^2}$$

$$L = \frac{c_1^2 \cdot M_1 M_2(M_1 + M_2) - 2c_1 c_2 M_1 M_2(M_1 + M_2) + c_2^2 \cdot M_1 M_2(M_1 + M_2)}{2(M_1 + M_2)^2}$$

$$L = M_1 M_2 \cdot \frac{c_1^2 - 2c_1 c_2 + c_2^2}{2(M_1 + M_2)}$$

$$L = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}\cdot\frac{(c_1 - c_2)^2}{2} \qquad \ldots \ldots \ldots (259)$$

$\frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}$, das Produkt durch die Summe der zusammenstoßenden Massen heißt das harmonische Mittel der Massen.

„Der Verlust an Energie ist also gleich der Energie, welche das harmonische Mittel der Massen besitzen würde, wenn es sich mit der Differenz der Anfangsgeschwindigkeiten der zum Stoße kommenden Massen bewegen würde.“

Führt man statt der Massen deren Gewichte ein, so lautet die Formel für den Energieverlust

$$L = \frac{G_1 \cdot G_2}{G_1 + G_2} \cdot \frac{(c_1 - c_2)^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (259a)$$

4. Vollkommen elastischer Stoß.

Die Energie der Massen ist hier vor und nach dem Stoße gleich. Demnach wird

$$\frac{M_1}{2} c_1^2 + \frac{M_2}{2} c_2^2 = \frac{M_1}{2} v_1^2 + \frac{M_2}{2} v_2^2$$

Hierzu

$$M_1 c_1 + M_2 c_2 = M_1 v_1 + M_2 v_2.$$

Aus den beiden Gleichungen lassen sich v_1 und v_2 finden.

Aus erster Gleichung folgt

$$M_1 (c_1^2 - v_1^2) = M_2 (v_2^2 - c_2^2)$$

Aus der zweiten

$$M_1 (c_1 - v_1) = M_2 (v_2 - c_2)$$

somit

$$c_1 + v_1 = v_2 + c_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (260)$$

$$v_2 = c_1 + v_1 - c_2$$

Dieser Wert in die Gleichung $M_1 c_1 + M_2 c_2 = M_1 v_1 + M_2 v_2$ eingeführt, ergibt

$$M_1 c_1 + M_2 c_2 = M_1 v_1 + M_2 c_1 + M_2 v_1 - M_2 c_2$$

$$v_1 (M_1 + M_2) = M_1 c_1 + 2 M_2 c_2 - M_2 c_1$$

$$v_1 (M_1 + M_2) = c_1 (M_1 + M_2) + 2 M_2 c_2 - 2 M_2 c_1$$

$$v_1 = c_1 - 2 \frac{M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (261a)$$

ebenso

$$v_2 = c_2 + 2 \frac{M_1 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (261b)$$

Haben die zum Stoße kommenden Kugeln gleiche Massen, d. h. ist $M_1 = M_2 = M$, dann wird

$$v_1 = c_1 - 2 \frac{M (c_1 - c_2)}{2M} = c_1 - c_1 + c_2$$

$$v_1 = c_2,$$

d. h. die erste Kugel nimmt die Geschwindigkeit der zweiten an.

Ebenso folgt

$$v_2 = c_2 + 2 \frac{M (c_1 - c_2)}{2M} = c_2 + c_1 - c_2$$

$$v_2 = c_1,$$

d. h. die zweite Kugel hat nach dem Stoße die Geschwindigkeit der ersten.

„Stoßen gleich große, vollkommen elastische Massen zusammen, so tauschen sie ihre Geschwindigkeit aus."

Ist die erste Masse eine feste, elastische Wand, so kann man sie (M_1) als ∞ ansehen. Ihre Geschwindigkeit c_1 ist Null. Daher wird die Geschwindigkeit

$$v_2 = c_2 + 2 \frac{c_1 - c_2}{1 + \frac{M_2}{M_1}} = c_2 - 2 c_2$$

$$v_2 = - c_2,$$

d. h. „die auf eine elastische Wand treffende Kugel wird mit der Geschwindigkeit zurückgehen, mit welcher sie auf die Wand auftrifft."

5. Unvollkommen elastischer Stoß.

Es gibt keinen Körper, der entweder vollkommen elastisch oder vollkommen unelastisch ist. Jeder Körper ist mehr oder weniger elastisch.

Die folgenden Untersuchungen ergeben daher allgemein giltige Resultate, in denen die vorangegangenen als spezielle enthalten sind.

Es war beim vollkommen unelastischen Stoß

$$v = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2}$$

Demnach beträgt die Geschwindigkeitsänderung

$$c_1 - v = c_1 - \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2} = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_1 - M_1 c_1 - M_2 c_2}{M_1 + M_2}$$

$$c_1 - v = \frac{M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}$$

und $$v - c_2 = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2} - c_2 = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2 - M_1 c_2 - M_2 c_2}{M_1 + M_2}$$

$$v - c_2 = \frac{M_1 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}$$

Dagegen war beim vollkommen elastischen Stoß

$$c_1 - v_1 = c_1 - c_1 + 2 \frac{M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2} = 2 \frac{M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}$$

$$v_2 - c_2 = 2 \frac{M_1 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2} - c_2 = 2 \cdot \frac{M_1 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}$$

„Die Geschwindigkeitsänderungen beim vollkommen elastischen Stoß sind doppelt so groß als beim vollkommen unelastischen.“

Die Geschwindigkeitsänderungen beim unvollkommen elastischen Stoß werden daher etwas weniger als zweimal so groß sein als die beim vollkommen unelastischen Stoß, etwa $(1 + \varkappa)$ mal, wenn $\varkappa < 1$ ist.

Es ergeben sich dann

$$c_1 - v_1 = (1 + \varkappa) \frac{M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}$$

$$v_2 - c_2 = (1 + \varkappa) \frac{M_1 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}$$

$$\mathbf{v_1 = c_1 - (1 + \varkappa) \frac{M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{(262\,a)}$$

$$\mathbf{v_2 = c_2 + (1 + \varkappa) \frac{M_1 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{(262\,b)}$$

Ein interessantes Resultat ergibt sich, wenn man die Differenz $(v_1 - v_2)$ bildet.

$$v_1 - v_2 = c_1 - c_2 - (1 + \varkappa) \frac{M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2} - (1 + \varkappa) \frac{M_1 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}$$

$$= c_1 - c_2 - (1 + \varkappa) \frac{c_1 (M_1 + M_2) - c_2 (M_1 + M_2)}{M_1 + M_2}$$

$$\mathbf{v_1 - v_2 = - \varkappa (c_1 - c_2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(263)}$$

$\varkappa$ heißt **Stoßkoeffizient** und kann empirisch ermittelt werden.

6. Ermittlung des Stoßkoeffizienten.

$$\varkappa = \frac{v_2 - v_1}{c_1 - c_2}$$

Wenn man alle Geschwindigkeiten kennt, ist $\varkappa$ bestimmt.

Man läßt eine Kugel die Höhe H frei gegen eine horizontale Wand aus gleichem Material fallen. Die Kugel wird von der letzteren dann die Höhe h nach aufwärts geschleudert.

Hierbei sind $M_2 = \infty$, $c_2 = 0$, $c_1 = \sqrt{2gH}$, $v_1 = -\sqrt{2gh}$, $v_2 = 0$

$$\varkappa = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{2gH}} = \sqrt{\frac{h}{H}}$$

$$\varkappa = \sqrt{\frac{h}{H}} \qquad (264)$$

Auf Grund von nach dieser Methode gemachten Versuchen wurde gefunden

für Stahl, Kork und Wolle . . . $\varkappa = 0{,}56$

„ Elfenbein . . . . $\varkappa = \frac{8}{9} = 0{,}89$

„ Glas . . . . $\varkappa = \frac{15}{16} = 0{,}94$

Mit der Höhe H darf aber über eine gewisse Grenze nicht hinausgegangen werden, da sonst entstehende Deformationen durch den Stoß nicht verschwinden.

7. Arbeitsverlust beim unvollkommen elastischen Stoß.

$$L = \frac{M_1 c_1^2}{2} + \frac{M_2 c_2^2}{2} - \left(\frac{M_1}{2} v_1^2 + \frac{M_2}{2} v_2^2\right)$$

$$= \frac{M_1}{2}(c_1 + v_1)(c_1 - v_1) + \frac{M_2}{2}(c_2 + v_2)\cdot(c_2 - v_2)$$

Nun gilt für alle Arten des Stoßes $M_1 c_1 + M_2 c_2 = M_1 v_1 + M_2 v_2$

somit $\frac{M_2}{2}(c_2 - v_2) = \frac{M_1}{2}(v_1 - c_1)$, daher wird

$$L = \frac{M_1}{2}(c_1 + v_1)(c_1 - v_1) + \frac{M_1}{2}(v_1 - c_1)(c_2 + v_2)$$

$$= \frac{M_1}{2}(c_1 - v_1)(c_1 + v_1 - c_2 - v_2) = \frac{M_1}{2}(c_1 - v_1)(c_1 - c_2 + v_1 - v_2)$$

Ferner war $\quad v_1 = c_1 - (1 + \varkappa)\frac{M_2(c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}$, d. h.

$$c_1 - v_1 = (1 + \varkappa)\frac{M_2(c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}$$

und $v_1 - v_2 = -\varkappa(c_1 - c_2)$, folglich

$$L = \frac{M_1}{2} \cdot (1 + \varkappa) \cdot \frac{M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2} \cdot (c_1 - c_2 + v_1 - v_2)$$

$$= \frac{M_1 M_2}{2 (M_1 + M_2)} \cdot (1 + \varkappa) \cdot [c_1 - c_2 - \varkappa (c_1 - c_2)] \cdot (c_1 - c_2)$$

$$= \frac{M_1 M_2}{2 (M_1 + M_2)} \cdot (1 + \varkappa) \cdot (1 - \varkappa) \cdot (c_1 - c_2)^2$$

$$L = \frac{1 - \varkappa^2}{2} \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot (c_1 - c_2)^2 \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{(265a)}$$

$$L = \frac{1 - \varkappa^2}{2} \cdot \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \cdot (c_1 - c_2)^2 \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{(265b)}$$

Spezialisierung:

a) für den vollkommen elastischen Stoß ist $\varkappa = 1$, daher $L = 0$;

b) für den vollkommen unelastischen Stoß ist $\varkappa = 0$, daher $L = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot (c_1 - c_2)^2$.

L wird um so größer, je größer $(c_1 - c_2)$ und je kleiner $\varkappa$ ist.

8. Der schiefe Zentralstoß.

Die vertikalen Komponenten der Geschwindigkeiten c_1 und c_2 werden durch den Stoß nicht beeinflußt, wohl aber die horizontalen, Fig. 210. Man

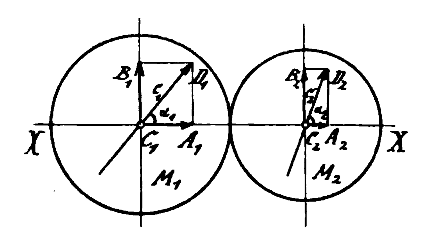


Fig. 210.

erhält die Geschwindigkeiten nach dem Stoße, indem man die geänderten Horizontalgeschwindigkeiten mit den Vertikalgeschwindigkeiten zusammensetzt. Vor dem Stoße sind die ersteren

$$\overline{C_1 A_1} = c_1 \cdot \cos \alpha_1 \text{ und}$$

$$\overline{C_2 A_2} = c_2 \cdot \cos \alpha_2$$

nach dem Stoße

$$v_1 = c_1 \cos \alpha_1 - \frac{(1 + \varkappa) M_2}{M_1 + M_2} (c_1 \cos \alpha_1 - c_2 \cdot \cos \alpha_2)$$

$$v_2 = c_2 \cdot \cos \alpha_2 + \frac{(1 + \varkappa) M_1}{M_1 + M_2} (c_1 \cos \alpha_1 - c_2 \cos \alpha_2)$$

Da $\overline{C_1 B_1} = c_1 \sin \alpha_1$ und $\overline{C_2 B_2} = c_2 \cdot \sin \alpha_2$ sind, folgt

$$w_1 = \sqrt{v_1^2 + (c_1 \cdot \sin \alpha_1)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(266a)}$$

$$w_2 = \sqrt{v_2^2 + (c_2 \cdot \sin \alpha_2)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(266b)}$$

Die Winkel, unter welchen w_1 und w_2 zur Achse $\overline{XX}$ geneigt sind, bestimmen sich aus

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{c_1 \cdot \sin \alpha_1}{v_1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (267\text{a})$$

$$\operatorname{tg} \beta_2 = \frac{c_2 \cdot \sin \alpha_2}{v_2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (267\text{b})$$

Beispiele.

246. Ein Körper trifft mit der Geschwindigkeit c in geradem, unvollkommen elastischem Stoße einen ruhenden von gleicher Masse. Wie groß sind die Geschwindigkeiten nach dem Stoße, wenn der Stoßkoeffizient $\varkappa$ ist?

Auflösung:

$$v_1 = c - (1 + \varkappa) \cdot \frac{M \cdot c}{2M}$$

$$v_1 = c - \frac{c}{2}(1 + \varkappa)$$

$$v_1 = c - \frac{c}{2} - \frac{c}{2}\varkappa = \frac{c}{2} - \frac{c}{2}\varkappa$$

$$v_1 = \frac{c}{2}(1 - \varkappa)$$

$$v_2 = 0 + (1 + \varkappa) \cdot \frac{Mc}{2M}$$

$$v_2 = \frac{c}{2}(1 + \varkappa)$$

247. Eine Stahlkugel fällt auf eine Stahlplatte aus einer Höhe von 0,5 m. Wie hoch springt sie zurück, wenn der Stoßkoeffizient $\varkappa = \frac{5}{9}$ ist?

Auflösung:

$$k = \sqrt{\frac{h}{H}} = \sqrt{\frac{h}{0{,}5}}$$

$$\left(\frac{5}{9}\right)^2 = \frac{h}{0{,}5}$$

$$h = \left(\frac{5}{9}\right)^2 \cdot 0{,}5 = \frac{12{,}5}{81} \text{ Meter}$$

$$h \sim 154{,}5 \text{ mm}$$

248. Unter welchen Umständen wird die Stoßwirkung beim Schmieden des Eisens eine große?

Auflösung: Der Verlust beim Stoße

$$L = \frac{1 - \varkappa^2}{2} \cdot \frac{G_1 G_2}{g_1 + g_2} (c_1 - c_2)^2,$$

welcher zur Deformation des Eisens nötig ist, wird um so kleiner, je kleiner c_2 und je kleiner x sind, ferner, da auch geschrieben werden kann

$$L = \frac{1 - \varkappa^2}{2} \cdot \frac{G_1}{\frac{G_1}{G_2} + 1} (c_1 - c_2)^2$$

je größer G_2 wird. Man erreicht dies dadurch, daß man die Unterlage (Chabotte) außerordentlich groß macht (sie auf einem großen Fundament

befestigt, mit welchem sie zusammen als unendlich groß gegenüber G_1 angesehen werden kann), daß man ihr ferner die Geschwindigkeit $c_2 = 0$ gibt und endlich dadurch, daß man Bär und Chabotte aus Stahl herstellt.

249. Welche Geschwindigkeit muß ein 2 kg schwerer Körper haben, um im unelastischen Stoße einem 5 kg schweren, 8 m/sek. Geschwindigkeit besitzenden Körper eine Geschwindigkeitsvergrößerung von 3 m zu erteilen?

Auflösung:

$$v = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2} = \frac{2 c_1 + 5 \cdot 8}{7} = 11$$

$$2 c_1 = 77 - 40 = 37$$

$$\mathbf{c_1 = 18{,}5\ m}$$

250. Eine 3 kg schwere Kugel stößt schief mit 3 m Geschwindigkeit auf eine 12 kg schwere, ruhende Kugel. Der Winkel der Stoßrichtung der ersten Kugel mit der Zentrale ist 60°. — Mit welchen Geschwindigkeiten w_1 und w_2 und unter welchen Winkeln β_1 und β_2 zur Zentrale gehen die beiden Kugeln nach dem Stoße weiter, wenn derselbe als vollkommen unelastisch angesehen wird?

Auflösung:

$$c_1 \sin \alpha_1 = 3 \cdot \sin 60^0 = 0{,}866 \cdot 3 = 2{,}598\ \text{m}$$

$$c_1 \cos \alpha_1 = 3 \cdot \cos 60^0 = 1{,}5\ \text{m}$$

$$c_2 \sin \alpha_2 = 0$$

$$c_2 \cos \alpha_2 = 0$$

$$v_1 = \frac{M_1 \cdot c_1 \cdot \cos \alpha_1 + M_2 \cdot 0}{M_1 + M_2} = \frac{3 \cdot 1{,}5}{15} = 0{,}3\ \text{m}$$

$$v_2 = v_1 = v$$

$$w_1 = \sqrt{0{,}09 + 2{,}598^2} = \sqrt{0{,}09 + 6{,}7} = \sqrt{6{,}79}$$

$$\mathbf{w_1 \sim 2{,}615\ m}$$

$$w_2 = \sqrt{0{,}09 + 0}$$

$$\mathbf{w_2 = 0{,}3\ m}$$

$$\text{tg}\,\beta_1 = c_1 \cdot \frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{2{,}598}{0{,}3} = 0{,}866$$

$$\mathbf{\beta_1 = 83^0\,25'}$$

$$\text{tg}\,\beta_2 = \frac{c_2 \sin \alpha_2}{v_2} = \frac{0}{v_2} = 0$$

$$\mathbf{\beta_2 = 0}$$

§ 66. Das technische und das absolute Maßsystem.

Geometrische, mechanische, magnetische und elektrische Einzelheiten werden bezogen

a) im **technischen Maßsystem** auf Meter (*M*), auf die Kilogrammmasse (*K*) und auf die Sekunde (*Sek*),

b) im **absoluten Maßsystem** auf Zentimeter (*cm*), auf die Grammmasse (*g*) und auf die Sekunde (*sek*).

Das technische Maßsystem heißt auch **$M \cdot K \cdot Sek$-System**, das absolute auch **$cm \cdot g \cdot sek$-System**. Letzteres ist nach den Vorschlägen von Gauß und Weber am 21. September 1881 auf dem Pariser Kongreß festgelegt worden.

Mittels der Einheiten eines Maßsystems läßt sich leicht die Homogenität von Formeln überprüfen.

1. **Geschwindigkeit.** Sie ist das Verhältnis aus einer Länge (Weg) und einer Zeit. Daher ist die

$$\textbf{Einheit der Geschw.} \begin{cases} \text{im } M \cdot K \cdot Sek\text{-System} \ldots & M \cdot Sek^{-1} \\ \text{im } cm \cdot g \cdot sek\text{-System} \ldots & cm \cdot sek^{-1} \end{cases} \quad (268)$$

1a. **Winkelgeschwindigkeit** ist der Quotient aus einer Bahngeschwindigkeit und dem Radius (Länge), an welchem sie vorhanden ist. Somit wird die

$$\textbf{Einheit der Winkelgeschw.} \begin{cases} \text{im } M \cdot K \cdot Sek\text{-System} \ldots\ldots & Sek^{-1} \\ \text{im } cm \cdot g \cdot sek\text{-System} \ldots\ldots & Sek^{-1} \end{cases} \quad (269)$$

2. **Beschleunigung** ist Geschwindigkeit durch Zeit. Es ist somit die

$$\textbf{Einheit der Beschl.} \begin{cases} \text{im } M \cdot K \cdot Sek\text{-System} \ldots & M \cdot Sek^{-2} \\ \text{im } cm \cdot g \cdot sek\text{-System} \ldots & cm \cdot sek^{-2} \end{cases} \quad (270)$$

2a. **Winkelbeschleunigung** ist die Beschleunigung am Bogen vom Radius 1, daher gleich der letzteren dividiert durch eine Länge. Somit ist die

$$\textbf{Einheit der Winkelbeschl.} \begin{cases} \text{im } M \cdot K \cdot Sek\text{-System} \ldots\ldots & Sek^{-2} \\ \text{im } cm \cdot g \cdot sek\text{-System} \ldots\ldots & sek^{-2} \end{cases} \quad (271)$$

3. **Kraft** ist das Produkt aus Masse und Beschleunigung. Daher

$$\textbf{Einheit der Kraft} \begin{cases} \text{im } M \cdot K \cdot Sek\text{-System} \,. & M \cdot K \cdot Sek^{-2} \\ \text{im } cm \cdot g \cdot sek\text{-System} \,. & cm \cdot g \cdot sek^{-2} \end{cases} \quad (272)$$

Einheit im $cm \cdot g \cdot sek$-System ist also jene Kraft, die der g-Masse die Beschleunigung von $1\, cm \cdot sek^{-2}$ erteilt.

$$\mathbf{1\, cm \cdot g \cdot sek^{-2} \text{ heißt } 1 \text{ Dyn}} \ldots\ldots\ldots \quad (272\text{a})$$

Wie viele Dyn. hat nun 1 kg Kraft?

$$1\, kg \text{ (Kraft)} = 1000 \cdot g \text{ (Massen) mal } 9{,}81\; M \cdot Sek^{-2} \text{ (Beschl.)}$$
$$= 1000\, g \cdot 981\, cm \cdot sek^{-2} = 9{,}81 \cdot 10^5 \cdot cm \cdot g \cdot sek^{-2}$$

$$\mathbf{1\, kg \text{ (Kraft)} = 9{,}81 \cdot 10^5 \text{ Dyn.} \sim 1000000 \text{ Dyn}} \ldots \quad (272\text{b})$$

4. **Druck** ist das Verhältnis aus einer Kraft (Gewicht) und der Fläche, welche beansprucht wird. Es wird demnach die

$$\textbf{Einheit des Druckes} \begin{cases} \text{im } M \cdot K \cdot Sek\text{-System} \ldots & M^{-1} \cdot K \cdot Sek^{-2} \\ \text{im } cm \cdot g \cdot sek\text{-System} \ldots & cm^{-1} \cdot g \cdot sek^{-2} \end{cases} \quad (273)$$

5. **Arbeit** ist Kraft mal Weg. Es folgt also die

$$\textbf{Einheit der Arbeit} \begin{cases} \text{im } M \cdot K \cdot Sek\text{-System} \ldots\ldots & M^2 \cdot K \cdot Sek^{-2} \\ \text{im } cm \cdot g \cdot sek\text{-System} \ldots\ldots & cm^2 \cdot g \cdot sek^{-2} \end{cases} \quad (274)$$

$1\, cm^2 \cdot g \cdot sek^{-2} = (1\, cm \cdot g \cdot sek^{-2}) \cdot (1\, cm) = 1 \text{ Dyn} \cdot 1\, cm$, also die Arbeit von 1 Dyn auf dem Wege von 1 cm

$$\mathbf{1\, cm^2 \cdot g \cdot sek^{-2} \text{ heißt } 1\, Erg} \ldots\ldots\ldots \quad (274\text{a})$$

$$\mathbf{10^7\, Erg \text{ heißen } 1 \text{ Joule}} \ldots\ldots\ldots \quad (274\text{b})$$

Wie viele Erg, bzw. Joule hat 1 mkg?

$$1\ mkg = 1\ kg \cdot 1\ m = 9{,}81 \cdot 10^5\ \text{Dyn} \cdot 10^2\ cm, \text{ d. h.}$$

$$\mathbf{1\ mkg = 9{,}81 \cdot 10^7\ Erg = 9{,}81\ Joule} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{(274\,c)}$$

Wie viele Erg entsprechen 1 Grammkalorie, wenn letztere 0,425 mkg äquivalent ist?

$$1 \text{ Grammkalorie} = 0{,}425 \cdot 9{,}81 \cdot 10^7 \text{ Erg, d. h.}$$

$$\mathbf{1\ Grammkalorie = 41{,}7 \cdot 10^6\ Erg} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{(274\,d)}$$

6. **Leistung** ist Arbeit pro Zeiteinheit. Demnach ist die

$$\textbf{Einheit der Leistung} \begin{cases} \text{im } M \cdot K \cdot Sek\text{-System} \ldots M^2 \cdot K \cdot Sek^{-3} \\ \text{im } cm \cdot g \cdot sek\text{-System} \ldots cm^2 \cdot g \cdot sek^{-3} \end{cases} \quad (275)$$

$$\mathbf{75\ M^2 \cdot K \cdot Sek^{-3} = 1\ PS} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{(275\,a)}$$

$$\mathbf{1\ cm^2 \cdot g \cdot sek^{-3}\ \text{heißt ein Sekundenerg}} \quad \ldots \quad \mathbf{(275\,b)}$$

$$\mathbf{10^7\ \text{Sekundenerg heißen 1 Watt}} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{(275\,c)}$$

$$\mathbf{1000\ \text{Watt heißen 1 Kilowatt}} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{(275\,d)}$$

$$\mathbf{1\ PS = 736\ Watt = 0{,}736\ Kilowatt} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{(275\,e)}$$

$$\mathbf{1\ Kilowatt = 1{,}36\ PS} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{(275\,f)}$$

Für die magnetischen und elektrischen Maße soll bloß das absolute Maßsystem herangezogen werden.

7. **Polstärke.** Sind zwei magnetische Pole $M \ldots r\ cm$ entfernt, so ziehen (stoßen) sie sich mit

$$P = \frac{M^2}{r^2} \text{ Dyn}$$

an (ab). Daher findet man $M = r\sqrt{P}$

also M als ein Produkt aus einer Länge und der Wurzel aus einer Kraft.

Die Einheit von M ist somit ... $cm \cdot \sqrt{cm \cdot g \cdot sek^{-2}}$ oder

$$\textbf{Einheit der Polstärke} \ldots \mathbf{cm^{3/2} \cdot g^{1/2} \cdot sek^{-1}} \quad \ldots \quad \mathbf{(276)}$$

7a. **Intensität des magnetischen Feldes oder magnetische Feldstärke.** Ein magnetisches Feld hat die Intensität 1, wenn es einen Einheitspol mit 1 Dyn anzieht. Wird ein Pol mit der Stärke M in ein Feld von der Intensität H gebracht, so ist die Anziehung

$$P = M \cdot H$$

Die Einheit von H ist daher $\frac{P}{M}$, d. h.

$$\frac{cm \cdot g \cdot sek^{-2}}{cm^{3/2} \cdot g^{1/2} \cdot sek^{-1}} \text{ oder}$$

$$\textbf{Einheit der magn. Feldstärke} \ldots \mathbf{cm^{-1/2} \cdot g^{1/2} \cdot sek^{-1}} \ldots \mathbf{(276\,a)}$$

8. **Stromstärke.** Nach dem Biot-Savartschen Gesetze ist die Anziehung zwischen einem Teil eines stromdurchflossenen Leiters und einem magnetischen Pole gleich Länge des Leiterteiles mal Polstärke mal Stromstärke mal Sinus des Winkels φ, welchen der Strahl vom Pol zum Leiterteil mit diesem bildet, dividiert durch das Quadrat der Länge des genannten Strahles, also

$$P = \frac{\triangle l \cdot M \cdot i \cdot \sin\varphi}{r^2}, \text{ woraus}$$

$$i = \frac{P \cdot r^2}{\triangle l \cdot M \cdot \sin\varphi} \text{ folgt.}$$

Somit ist die Einheit von i . . . $cm \cdot \frac{P}{M} = cm \cdot \frac{cm \cdot g \cdot sek^{-2}}{cm^{-3/2} \cdot g^{1/2} \cdot sek^{-1}}$ oder

Einheit der Stromstärke . . . $cm^{1/2} \cdot g^{1/2} \cdot sek^{-1}$ . . . . . . **(277)**

Prakt. Einheit = 1 Ampère = $10^{-1} \cdot cm^{1/2} \cdot g^{1/2} \cdot sek^{-1}$ . . **(277a)**

9. Elektromotorische Kraft oder Spannung.

Zwischen 2 Magnetpolen liegt ein magnetisches Feld. Gehen durch 1 qcm . . . H Kraftlinien, so hat das Feld die Stärke H. Wird nun ein Leiter von der Länge l mit der Geschwindigkeit v senkrecht zur Richtung der Kraftlinien bewegt, so schneidet er in 1 Sek.

$$(l \cdot v \cdot H) \text{ Kraftlinien}$$

und wird infolge der Reaktionswirkung gegen die Bewegung des Leiters in diesem die elektromotorische Kraft

$$D = l \cdot v \cdot H$$

erzeugt. — D ist also Produkt aus einer Länge, einer Geschwindigkeit und einer magnetischen Feldstärke. Die Einheit von D ist daher

$$(cm) \cdot (cm \cdot sek^{-1}) \cdot (cm^{-1/2} \cdot g^{1/2} \cdot sek^{-1})$$

Einheit der elektromot. Kraft = $cm^{3/2} \cdot g^{1/2} \cdot sek^{-2}$ . . . . **(278)**

Sie tritt auf, wenn ein Leiter von 1 cm Länge in der Sek. eine Kraftlinie senkrecht schneidet.

Prakt. Einheit der elektromot. Kraft =

1 Volt = $10^8 \cdot cm^{3/2} \cdot g^{1/2} \cdot sek^{-2}$ . . . . . . **(278a)**

10. Widerstand. Laut Ohmschem Gesetz ist

$$e = i \cdot w$$

$$w = \frac{e}{i}$$

Die Einheit des Widerstandes wird daher

$$\frac{cm^{3/2} \cdot g^{1/2} \cdot sek^{-2}}{cm^{1/2} \cdot g^{1/2} \cdot sek^{-1}}, \text{ oder}$$

Einheit des Widerstandes = $cm \cdot sek^{-1}$ . . . . **(279)**

Der Widerstand hat dieselbe Benennung wie die Geschwindigkeit.

Prakt. Einheit des Widerstandes = 1 Ohm = $10^9 \cdot cmsek^{-1}$. **(279a)**

11. Elektrische Arbeit. Nach dem Jouleschen Gesetz leistet ein Strom mit der Stärke i bei einem Widerstande w in der Zeit t die Arbeit

$$A = i^2 \cdot w \cdot t$$

Daher ist die Einheit von A . . . $(cm^{1/2} \cdot g^{1/2} \cdot sek^{-1})^2 \cdot cmsek^{-1} \cdot sek$.

Einheit der elektr. Arbeit = $cm^2 \cdot g \cdot sek^{-2}$ = 1 Erg . . **(280)**

12. Elektrischer Effekt ist die elektrische Arbeit in der Zeiteinheit; also wird

Einheit des elektr. Effekts = $cm^2 \cdot g \cdot sek^{-3}$ = 1 Sekundenerg . **(280a)**

Der elektrische Effekt 1 Watt wird von einem Strom mit 1 Ampère Stärke und 1 Volt Spannung geleistet, denn

1 Volt · 1 Ampère = $10^8 \cdot cm^{3/2} \cdot g^{1/2} \cdot sek^{-2} \cdot 10^{-1} \cdot cm^{1/2} \cdot g^{1/2} \cdot sek^{-1} = 10^7 \cdot cm^2 \cdot g \cdot sek^{-3}$

1 Volt · 1 Ampère = 1 Voltampère = 1 Watt . . . **(280b)**

Anhang I.

Zusammenstellung der Formeln.

			Seite
Kraft, welche der Masse m die Beschleunigung erteilt, ist			
	$P = m \cdot p$	(1)	2
	$m = \frac{P}{p}$	(1a)	2
Die Masse, welche G kg wiegt, hat die Größe			
	$m = \frac{G}{g}$	(2)	2
Weg bei einer gleichförmigen Bewegung			
	$s = c \cdot t$	(3)	4
Verhältnis der Wege s_1 und s in den Zeiten t_1 und t bei einer gleichförmigen Bewegung			
	$\frac{s_1}{s} = \frac{t_1}{t}$	(4)	4
Endgeschwindigkeit bei einer gleichförmig beschleunigten Bewegung	$v = c + pt$	(5)	7
Weg bei einer gleichförmig beschleunigten Bewegung			
	$s = \frac{v + c}{2} \cdot t$	(6)	7
	$s = c \cdot t + \frac{p}{2} \cdot t^2$	(7)	8
	$s = \frac{v^2 - c^2}{2p}$	(8)	8
Endgeschwindigkeit beim freien Fall			
	$v = g \cdot t$	(9)	8
Weg beim freien Fall (Fallhöhe)			
	$s = \frac{v}{2} \cdot t = \frac{g}{2} \cdot t^2$	(10)	8
Endgeschwindigkeit um die Höhe h			
	$v = \sqrt{2gh}$	(11)	8

Seite

Reibungsbetrag

$$W = f \cdot N$$ . . . . (82) 107

Reibungskoeffizient

$$f = \operatorname{tg} \varphi$$ . . . . (83) 107

Einrückkraft bei einer Friktionskupplung

$$K = \frac{716200\, N}{f \cdot r \cdot n} \cdot (\sin \alpha + f \cdot \cos \alpha)$$ . . . . . (84) 109

Reibungsmoment am zylindrischen Tragzapfen

$$M = W \cdot r = \varphi \cdot N \cdot r$$ . . . . (85) 110

Effektsverlust durch Reibung am zylindrischen Tragzapfen

$$E = \frac{2\pi}{60} r \varphi N n \text{ mkg/sek}$$ . . . . . . (86a) 110

$$E = \frac{2\pi}{60 \cdot 75} r \varphi N n \text{ in PS}$$ . . . . . . (86b) 110

Reibungsmoment am Ringspurzapfen

$$M = \frac{2}{3} \varphi N \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$$ . . . . (87) 111

Reibungsmoment am vollen, zylindrischen Spurzapfen

$$M = \frac{2}{3} \varphi N R$$ . . . . (88) 111

Effektsverlust durch Reibung beim Ringspurzapfen

$$E = \frac{\pi}{45 \cdot 75} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \cdot \varphi N n$$ . . . . . (89) 111

Effektsverlust durch Reibung beim vollen Spurzapfen

$$E = \frac{\pi}{45 \cdot 75} \cdot R \varphi N n$$ . . . . (90) 111

Reibungsmoment am eingelaufenen Ringspurzapfen

$$M = \varphi N \cdot \frac{R + r}{2}$$ . . . . (91) 111

Reibungsmoment am eingelaufenen, vollen Spurzapfen

$$M = \frac{1}{2} \varphi N R$$ . . . . (92) 111

Sekundliche Reibungsarbeit am eingelaufenen Ringspurzapfen

$$E = \varphi N \cdot (R + r) \cdot \frac{\pi n}{60 \cdot 75} \text{ in PS}$$ . . . . . (93) 111

Sekundliche Reibungsarbeit am eingelaufenen, vollen Spurzapfen

$$E = \varphi N R \frac{\pi n}{60 \cdot 75}$$ . . . . (94) 111

Länge eines zylindrischen Tragzapfens, damit die Reibungsarbeit pro Sekunde höchstens 1 mkg/qcm wurde

$$l \sim \frac{1}{4000} N \cdot n$$ . . . . (95) 112

Verlust an Leistung durch Reibung einer Welle in ihren Lagern

$$E \sim 0{,}03\, N l$$ . . . . (96) 113

Seite

Bedingung für die Selbsthemmung einer Schraube

$$\alpha < \varphi \quad \ldots\ldots \quad (140) \quad 151$$

Sitzt auf der Schraube ein Handrad mit dem Radius R, so ist zum Heben der Last am Umfange desselben nötig die Kraft

$$P_1 = \frac{r}{R} \cdot Q \cdot \mathrm{tg}\,(\alpha + \varphi) \quad \ldots\ldots \quad (141) \quad 151$$

$$P_1 = \frac{r}{R} \cdot Q \cdot \frac{\frac{h}{2 r \pi} + f}{1 \mp f \cdot \frac{h}{2 r \pi}} \quad \ldots\ldots \quad (142) \quad 151$$

Wirkungsgrad der Schraube

$$\eta = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,(\alpha + \varphi)} \quad \ldots\ldots \quad (143) \quad 151$$

Steigungswinkel einer Schraube, für welchen deren Wirkungsgrad ein Maximum wird,

$$\alpha = 45 - \frac{\varphi}{2} \quad \ldots\ldots \quad (144) \quad 152$$

Maximaler Wirkungsgrad einer Schraube

$$\eta_{max} = \frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi} \quad \ldots\ldots \quad (145) \quad 152$$

Steigung einer auf einer Drehbank zu schneidenden Schraube

$$S = \frac{a \cdot b}{c \cdot d} \cdot L \quad \ldots\ldots \quad (146) \quad 155$$

Spannung im ziehenden Trum eines um einen festen Zylinder liegenden Teiles

$$T = t \cdot e^{f\alpha} \quad \ldots\ldots \quad (147) \quad 157$$

Widerstand gegen die Seilbewegung

$$W = t \cdot (e^{f\alpha} - 1) \quad \ldots\ldots \quad (148) \quad 157$$

Kraft am Hebel einer einfachen Bandbremse

$$K = \frac{b}{a} \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{Q}{e^{f\alpha} - 1} \quad \ldots\ldots \quad (149) \quad 158$$

Kraft am Hebel einer Differentialbremse

$$K = \frac{1}{a} \cdot \frac{r}{R} \cdot Q \cdot \frac{b_2 - b_1 \cdot e^{f\alpha}}{e^{f\alpha} - 1} \quad \ldots\ldots \quad (150) \quad 159$$

Bedingung für die Selbsthemmung einer Differentialbremse

$$b_2 = b_1 \cdot e^{f\alpha} \quad \ldots\ldots \quad (151) \quad 159$$

Kraft am Handrade einer Schraubenbremse

$$P = \frac{r \cdot r_1}{R \cdot R_1} \cdot Q \cdot \frac{\mathrm{tg}\,(\alpha_1 + \varphi_1)}{e^{f\alpha} - 1} \quad \ldots\ldots \quad (152) \quad 160$$

Kraft am geraden Hebel einer Backenbremse

$$K = \frac{r}{R} \cdot \frac{b}{a + b} \cdot \frac{Q}{f} \quad \ldots\ldots \quad (153) \quad 162$$

Seite

Seite

Ein Zylinder wickelt sich von um seine Endzapfen geschlungenen Fäden vertikal ab mit der Beschleunigung

$$p = \frac{2\varrho^2}{r^2 + 2\varrho^2} \cdot g \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (226) \quad 204$$

Die Fadenspannung ist hierbei

$$S = G \cdot \frac{r^2}{r^2 + 2\varrho^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (227) \quad 205$$

Ein Zylinder wickelt sich von einem um ihn mehrmals geschlungenen Faden längs einer schiefen Ebene ab mit der Beschleunigung

$$p = \frac{2}{3} g \sin\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (228) \quad 205$$

Die Fadenspannung ist hierbei

$$S = \frac{G}{3} \sin\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (229) \quad 205$$

Ein Zylinder rollt eine schiefe Ebene herunter, wenn die Be. dingung besteht,

$$f \geqq \frac{1}{3} \operatorname{tg}\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (230) \quad 206$$

Ein Zylinder gleitet eine schiefe Ebene herunter, wenn die Bedingung besteht,

$$f \leqq \operatorname{tg}\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (230\text{a}) \quad 206$$

Beschleunigung, mit welcher eine Kugel eine schiefe Ebene herunterrollt,

$$p = r \cdot \varepsilon = \frac{5}{7} g \cdot \sin\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (231) \quad 207$$

Wenn sich eine Kugel von einem Faden, längs einer schiefen Ebene dabei herunterrollend, abwickelt, ist die Spannung in demselben

$$S = \frac{2}{3} G \sin\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (232) \quad 207$$

Bedingung für das Herunterrollen der Kugel von der schiefen Ebene

$$f = \frac{2}{7} \cdot \operatorname{tg}\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (233) \quad 207$$

Reduzierte Länge eines physischen Pendels

$$l = \frac{J_o}{M \cdot s} = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (234) \quad 208$$

Schwingungsdauer eines physischen Pendels

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{J_o}{Mgs}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{\text{reduzierte Länge}}{g}} \quad . \; . \; . \quad (235) \quad 208$$

Empirische Bestimmung des Trägheitsmomentes von Körpern

$$J_o = \frac{t^2}{\pi^2} \cdot \frac{P \cdot a}{\sin\alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (236) \quad 209$$

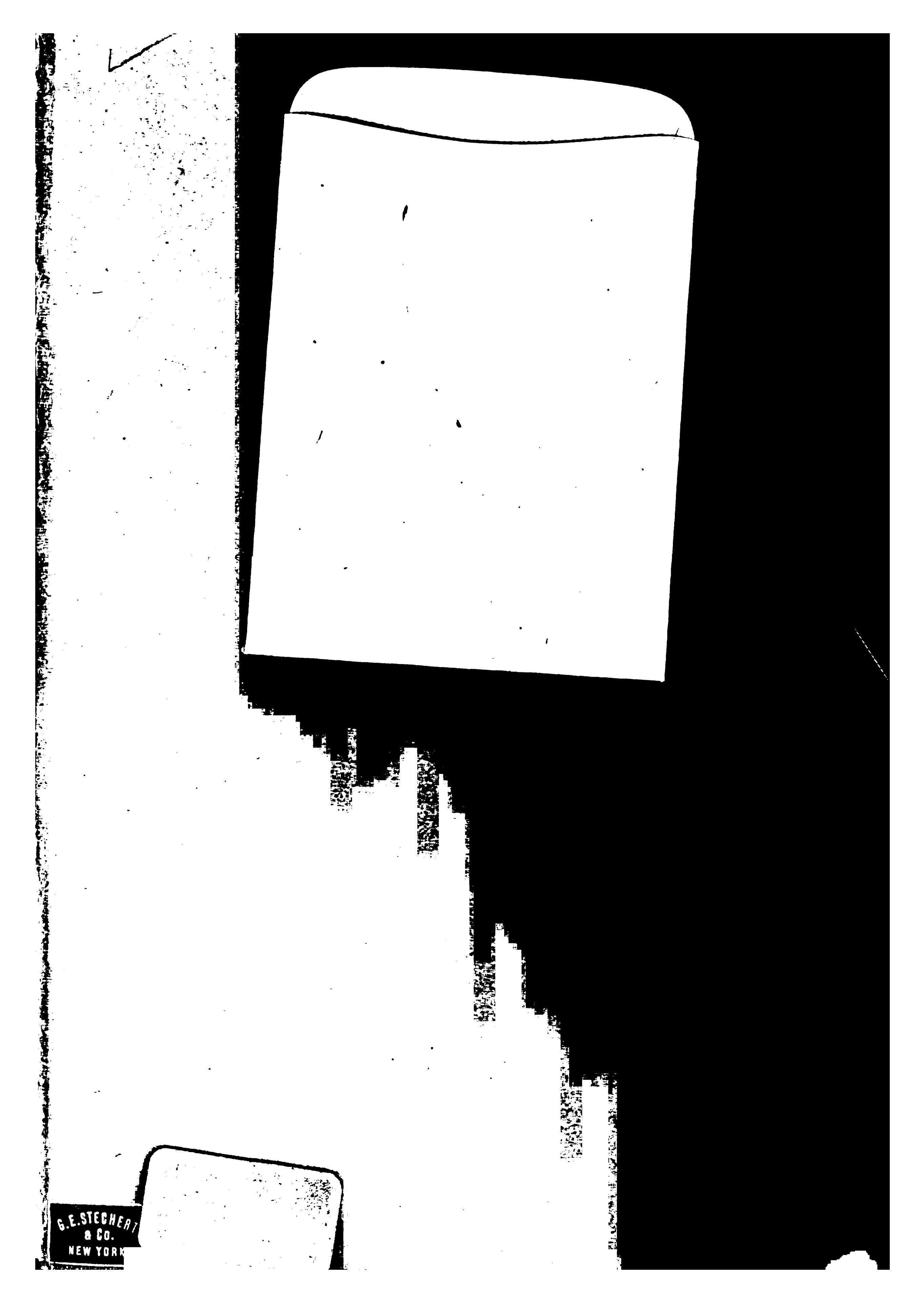
Anhang II.

Sachverzeichnis.

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.






G.E.STECHER
& CO.
NEW YOR